UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Departamento de Matemática Aplicada II

COOPERACIÓN PARCIAL EN JUEGOS DE N–PERSONAS

Jorge Jesús López Vázquez

Tesis Doctoral

Memoria presentada por Jorge J. López Vázquez para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Sevilla.

V$^{\underline{o}}$ B$^{\underline{o}}$ del Director:

Fdo: Jesús Mario Bilbao Arrese

Sevilla, 1996

Índice

Capítulo 1

Introducción

1.1 Cooperación parcial en juegos de n–personas

La teoría de juegos fue fundada por John von Neumann en 1928 [64]. Esta moderna aproximación a los problemas de cooperación y competición se redescubrió cuando von Neumann escribe un tratado con el economista Oskar Morgenstern, titulado *Theory of Games and Economic Behavior* [65]. En ella, un juego cooperativo es una situación derivada de una actividad en la que los elementos o actores que intervienen (personas, instituciones, empresas, etc.) persiguen alcanzar un determinado objetivo (ganar una votación, buscar mayores beneficios empresariales, mejorar una gestión, etc.) mediante la colaboración entre ellos. A diferencia de los denominados juegos competitivos o no cooperativos —caracterizados por las estrategias que puede emplear cada uno de los jugadores y una función de pagos asociada a cada jugador, la cual depende de las diferentes estrategias que se empleen—, en un juego cooperativo no es necesario analizar las estrategias de los jugadores; es suficiente conocer los pagos asociados a los resultados del juego.

En principio, en el estudio de los juegos cooperativos de n–personas, se supone que cualquiera de los jugadores quiere cooperar con los demás o, en otro caso, el juego se desarrollará en forma no cooperativa. Es decir, será posible formar cualquier coalición entre jugadores y, por tanto, existirá una cooperación universal entre todos ellos.

En la actualidad, la teoría de juegos cooperativos se aplica en distintas áreas de conocimiento como pueden ser la Investigación Operativa, Teoría de la Decisión, Ciencias Políticas y Económicas, mercados económicos, asignación de costes, modelos sobre contaminación y localización (véase Brams, Lucas y Straffin [14]). Debido a ello, esta filosofía de cooperación general entre todos los jugadores no siempre puede aplicarse ya que no sirve para modelar todas las situaciones. Esto puede contemplarse, por ejemplo, en aquellos juegos simples que modelan los diferentes sistemas de votación establecidos en diversas instituciones sociales, empresariales, políticas, etc. También puede observarse en cualquier juego que intente representar una situación en la que algunos jugadores no sean afines entre sí, su cooperación esté condicionada por intereses comunes, o tengan algún tipo de veto a la participación de ciertos jugadores en determinadas coaliciones.

En opinión de Harsanyi y Selten [34], existen importantes clases de juegos intermedios entre la cooperación completa y la no cooperación absoluta para los que no existen conceptos de solución satisfactorios. La aproximación más simple, que incorpora restricciones a las coaliciones entre los jugadores en un juego cooperativo, es el modelo de Aumann y Maschler [1] sobre *juegos con estructuras de coalición*. En esta aproximación a una cooperación más restringida o limitada, los jugadores son distribuidos formando una partición del conjunto de los mismos, $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$, denominada estructura de coalición. Así, dada una estructura de coaliciones, las relaciones entre jugadores pueden realizarse, únicamente, dentro de las coaliciones que constituyen la estructura. Posteriormente, Aumann y Dréze [2], definen el valor $\Phi_{\mathcal{B}}[v]$ mediante una familia de axiomas y establecen que la restricción del valor $\Phi_{\mathcal{B}}[v]$ a cada elemento de la partición es el valor de Shapley del subjuego

(B_i, v_{B_i}).

Otros trabajos que han desarrollado la investigación en juegos cooperativos con estructuras de coalición, dadas de forma exógena, son debidos a Owen [51], Hart y Kurz [36], Levy y Mc Lean [42], Winter [70], [71], [72], y Mc Lean [43]. Por otro lado, la formación endógena de coaliciones, la cual se encuentra implícita en la teoría de conjuntos estables de John von Neumann y Oskar Morgenstern, es estudiada por otros investigadores como Shenoy [60], Hart y Kurz [35], [40].

Las estructuras de coalición no pueden emplearse en aquellas situaciones en las que la relación entre los jugadores no sea transitiva. Entonces, Myerson [44] propone un nuevo punto de vista para modelar la conducta cooperativa entre los jugadores. Dado un juego (N, v), Myerson le asocia un grafo de cooperación $G = (N, E)$ cuyo conjunto de vértices N es el formado por todos los jugadores y cuyo conjunto de aristas no ordenadas E viene dado por los acuerdos bilaterales entre los jugadores. El juego restringido por el grafo de cooperación se define mediante

$$v^G(S) = \sum v(S_j^G),$$

donde la suma recorre todas las componentes conexas S_j^G del subgrafo inducido por $S \subseteq N$. Entonces, el valor de Myerson definido en el juego (N, v) con el grafo de cooperación G es

$$\Phi_i^G[v] = \Phi_i[v^G],$$

donde Φ_i es el valor de Shapley ordinario para un jugador i. Un juego cooperativo junto con un grafo de relaciones de cooperación entre los jugadores es denominado habitualmente *situación de comunicación*.

La linea de investigación planteada por Myerson ha continuado con trabajos de Owen [52], Nouweland y Borm [48], Carreras [17], Nouweland, Borm y Tijs [49], entre otros. Por otra parte, la formación endógena de situaciones de comunicación es analizada por Aumann y Myerson [3], y otros modelos recientes de cooperación restringida son estudiados por Bergantiños, Carreras y García Jurado [6], Calvo y Lasaga [15]. Usando métodos combinatorios, Faigle [25], [27], propone un nuevo modelo para analizar la cooperación parcial. En dicho modelo, se define el juego cooperativo sobre un subconjunto $\mathcal{F}$ de las partes del conjunto de jugadores y las coaliciones que pertenecen a este subconjunto se denominan *factibles*, no poseyendo ninguna estructura determinada

$$v \,:\, \mathcal{F} \subseteq 2^N \longrightarrow \mathbb{R}, \quad v(\emptyset) = 0.$$

Posteriormente, se extiende el juego a todas aquellas coaliciones de N que puedan expresarse como unión, no necesariamente única, de coaliciones factibles disjuntas dos a dos.

Volviendo al modelo iniciado por Myerson, puede observarse que el concepto de juego restringido por un grafo de comunicación se define —tal como se indica en un parágrafo anterior— mediante una suma extendida a todas las componentes conexas del subgrafo determinado por cada coalición de jugadores. Es obvio que, en este caso, son las componentes conexas las que determinan el valor de la función característica correspondiente al juego restringido. Teniendo esto en cuenta, este trabajo de investigación se inicia con la intención de generalizar los conceptos anteriores, de forma que la relación entre los jugadores no tenga porqué estar representada por un grafo no orientado, ni que las componentes conexas de los diferentes subgrafos constituyan el soporte del juego restringido.

Para ello, se asume parte de los conceptos de Faigle en cuanto a que se considera un conjunto arbitrario de coaliciones factibles y se define el juego restringido utilizando como elemento básico dicho sistema de coaliciones factibles. Esto, junto con el análisis de los trabajos de Owen, Borm, Nouweland y Tijs —entre otros—, desembocará en la utilización de sistemas de partición, espacios de clausura, geometrías convexas y técnicas de análisis combinatorio para llegar a una generalización de los conceptos introducidos por Myerson y algunos investigadores citados anteriormente.

1.2 Sumario

En el segundo capítulo, después de una breve introducción en la que se recogen conceptos generales de la teoría de juegos y otros que han de ser utilizados, se introduce el concepto de *sistema de coaliciones factibles* y el de juego restringido por dicho sistema. Estas ideas han sido introducidas por Faigle [25] aunque, en esta tesis, se utiliza un concepto de sistema de coaliciones factibles de forma que se pueda definir el juego restringido $\tilde{v}^{\mathcal{F}}$ sobre cualquier coalición de jugadores.

En la sección correspondiente, se sistematiza el estudio de las propiedades del juego restringido $(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}})$ y las que se heredan del juego (N, v). Se prueba la superaditividad del juego restringido y se establece que el carácter monótono, simple y propio del juego v es heredado por el juego $\tilde{v}^{\mathcal{F}}$. Además, se resalta que la supermodularidad de la función v no implica, en general, la supermodularidad de la función característica correspondiente al juego restringido. Por esto, se plantea el estudio de las condiciones que ha de cumplir un sistema de coaliciones factibles para que se transfiera la convexidad del juego (N, v) al juego $(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}})$, en la sección dedicada a los juegos restringidos por un sistema de partición.

Se estudia la relación existente entre los *cores* del juego (N, v) y del juego $(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}})$, estableciéndose una relación de inclusión entre ambos bajo la hipótesis adicional de ser $v(N) = \tilde{v}^{\mathcal{F}}(N)$, y se utiliza un resultado de Faigle para caracterizar el *core* del juego restringido.

A continuación, y con idea de generalizar resultados de Myerson y Owen sobre cooperación parcial, se define el concepto de $\mathcal{F}$–componente o coalición factible maximal de una determinada coalición $S \subseteq N$; se pone de manifiesto que no constituyen, en general, una partición de S ya que no tienen por qué ser disjuntas y se da una condición necesaria y suficiente para que las $\mathcal{F}$–componentes de cualquier coalición formen una partición de la misma. Además, se analizan las condiciones que permiten determinar la función característica del juego restringido mediante la partición de cualquier coalición en sus $\mathcal{F}$–componentes.

Lo anterior da pie a introducir el concepto de *sistema de partición* y el concepto de $\mathcal{F}$–juego restringido asociado. Estas definiciones supondrán una generalización del concepto de *juego restringido por un grafo de comunicación* y un caso particular del concepto de *juego con estructura de cooperación* definido por Weber en [67]. En esta nueva situación, el juego restringido, $(N, v^{\mathcal{F}})$ no es siempre superaditivo y —siguiendo el misma esquema de trabajo que para los sistemas de coaliciones factibles— se generalizan algunos resultados de Owen y Carreras sobre la transmisión de la superaditividad y el carácter simple y propio del juego (N, v) al juego restringido. También, utilizando las condiciones apuntadas por Faigle sobre familias intersectantes, se establecen las hipótesis que implican condiciones suficientes para que el juego restringido sea convexo cuando lo sea el juego (N, v), extendiéndose el resultado a una unión finita de familias intersectantes atómicas, disjuntas dos a dos y que contienen al conjunto vacío. Esto último permitirá, en el siguiente capítulo, generalizar algunos resultados de Nouweland y Borm sobre la supermodularidad del juego restringido.

Teniendo en cuenta las relaciones establecidas entre el *core* del juego (N, v) y del juego $(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}})$ para un sistema de coaliciones factibles, se estudia su permanencia en un sistema de partición aunque el $\mathcal{F}$–juego restringido, $(N, v^{\mathcal{F}})$, está ahora definido de forma diferente. Así, se demuestra que, con la misma hipótesis adicional, se mantiene la relación de inclusión entre los *cores* de ambos juegos, y que el juego restringido es totalmente equilibrado si lo es el juego (N, v).

En la última sección del segundo capítulo, se define el operador $L_{\mathcal{F}}$ que asocia a cada juego el correspondiente juego restringido. Se demuestran algunas características del mismo, se calculan los transformados de los juegos de unanimidad y se prueba, mediante la utilización de las propiedades de la función de Möbius, que los juegos de unanimidad cuyo soporte es una coalición factible constituyen una base del espacio imagen. Ello permitirá la generalización de algunos resultados de Owen sobre juegos restringidos por grafos.

En el capítulo tercero, se amplía el estudio de los juegos restringidos por un sistema de partición y se analizan en los sistemas cuyo conjunto de coaliciones factibles sea una geometría convexa. Así, por un lado, se definirán los conceptos de $\mathcal{F}$–valor de Shapley y de Banzhaf–Coleman, la $\mathcal{F}$–extensión multilineal de Owen y el $\mathcal{F}$–potencial restringido de Hart y Mas–Colell; por otro lado, se introducirá el concepto de geometría convexa de partición y se estudiarán, en esta situación, las características especiales de los conceptos previamente definidos.

En la primera sección, se introducen los conceptos básicos sobre las geometrías convexas —dados por Edelman y Jamison en [22]— y se comprobará que el par $(N, \mathcal{L})$ no es, en general, ni un sistema de partición ni un sistema de coaliciones factibles. Ello obligará a definir las geometrías convexas de partición, de las que se expondrán algunos aspectos relevantes y específicos.

En la segunda sección, en una terna $(N, \mathcal{F}, v)$ en la que $(N, \mathcal{F})$ es un sistema de partición y (N, v) un juego definido sobre N, se definen los conceptos de $\mathcal{F}$–valor de Shapley y de Banzhaf–Coleman del juego (N, v) como los valores correspondientes al juego restringido $(N, v^{\mathcal{F}})$. Será inmediato ver que las definiciones introducidas significan una generalización del valor de Shapley y de Banzhaf–Coleman así como del valor de Myerson, y se pondrá de manifiesto la importancia del cálculo de los dividendos del juego restringido para determinar los $\mathcal{F}$–valores. Utilizando una base del espacio $L_{\mathcal{F}}(\Gamma^N)$, se obtiene una fórmula que relaciona a dichos dividendos con los del juego (N, v).

Al estudiar la situación en el caso de geometrías convexas de partición, se alcanzan resultados que permiten calcular los dividendos del juego restringido mediante los valores de la función característica del juego (N, v). En dichos resultados intervendrá la función de Möbius, el hecho de ser $(\mathcal{L}, \subseteq)$ un retículo y el intervalo $[S^-, S]$ un álgebra de Boole.

En la misma sección, se define la $\mathcal{F}$–extensión multilineal de Owen, la cual hará posible obtener los $\mathcal{F}$–valores de Shapley y de Banzhaf–Coleman mediante la integración de la función $f_v^{\mathcal{F}}$ a través de la diagonal principal del cubo unidad $[0,1]^n$, y por derivación parcial de la misma evaluada en el punto $(1/2, \ldots, 1/2)$.

En la sección dedicada al potencial de Hart y Mas–Colell [37], se define el $\mathcal{F}$–potencial restringido del juego (N, v), observándose que tiene sentido la definición para cualquier subjuego (S, v_S) y que puede generalizarse el resultado de Winter [70] para el potencial del valor de Myerson. Teniendo en cuenta que a cualquier coalición se le asocia una partición en coaliciones factibles maximales, se establece un nuevo algoritmo recursivo para calcular el $\mathcal{F}$–valor de Shapley sin necesidad de conocer los valores de la función característica correspondiente al juego $(N, v^{\mathcal{F}})$. Además, en el caso de que el sistema de partición sea una geometría convexa $(N, \mathcal{L})$, se obtienen fórmulas explícitas para el cálculo del $\mathcal{L}$–potencial convexo, haciéndose notar que éstas coinciden con las fórmulas proporcionadas por Hart y Mas–Colell cuando se considera como par $(N, \mathcal{L})$ el álgebra de Boole de las partes de N.

En la última sección del tercer capítulo, se analizan para los juegos simples los resultados fundamentales obtenidos en las secciones anteriores. Ello se justifica por la aplicabilidad de los juegos simples y por el hecho de que, en este tipo de juegos, las coaliciones son ganadoras o perdedoras sin posibilidades intermedias. Así, mientras que en los sistemas de partición son determinantes las coaliciones factibles para el cálculo de los diferentes conceptos de solución del juego restringido, ahora las coaliciones ganadoras y factibles, $\mathcal{F} \cap \mathcal{W}$, tendrán una relevancia especial.

En el cuarto capítulo se estudia una clase de sistemas de coaliciones factibles derivada de establecer, en el conjunto finito de jugadores N, una relación de orden parcial y considerar los conjuntos convexos de $P = (N, \leq)$.

En la primera sección, se introducen los conceptos básicos sobre el conjunto $Co(P)$ —dados por Birkoff y Bennett [10], así como por Edelman y Jamison [22]—, se indica que el par $(N, Co(P))$ es una geometría convexa atómica y, por tanto, un sistema de coaliciones factibles. Además, se hace notar que si la longitud o rango del conjunto parcialmente ordenado P es menor o igual a la unidad, entonces el par $(N, Co(P))$ es una geometría convexa de partición; ahora bien, en esta circunstancia, al considerar la terna $(N, Co(P), v)$, resulta que la función característica del $Co(P)$–juego restringido coincide con la del juego (N, v).

Si la longitud del conjunto parcialmente ordenado es mayor o igual que dos, entonces el par $(N, Co(P))$ no es un sistema de partición. Por ello, la segunda sección se dedica a investigar bajo que condiciones se verifica que $(N, Co(P))$ es una geometría convexa de partición.

En la sección segunda, se consideran conjuntos finitos parcialmente ordenados *coherentes*, tales que cualquier subconjunto parcialmente ordenado inducido y con longitud mayor o igual que dos sea *coherente*. Esta clase especial de conjuntos finitos parcialmente ordenados se denominarán *completamente coherentes*, y se demostrará la siguiente caracterización: el par $(N, Co(P))$ es un sistema de partición si y sólo si P es *completamente coherente* y $P \setminus ex(P)$ es una cadena.

En el último capítulo, se presentan algunas aplicaciones de la teoría de juegos para evaluar la distribución del poder de las naciones en el Consejo de la Unión Europea, así como la de los partidos políticos en el Congreso de los Diputados de España y en los Parlamentos de Andalucía y de Cataluña.

El estudio de los índices de poder en las Ciencias Políticas tiene antecedentes en los trabajos de Herne y Nurmi [38], Widgrén [68], y Lane y Mæland [41], los cuales analizan el poder coalicional en el Consejo de Europa; Carreras y Owen [16], Carreras [17], y Calvo y Lasaga [15], lo aplican a los

Parlamentos de Cataluña y España. Otras situaciones son también estudiadas por Edelman [23]. En las aplicaciones que aquí se presentan, se calculan los índices de poder mediante el programa de cálculo simbólico *Mathematica*, con el que se definen nuevas funciones con objeto de obtener el poder convexo de Shapley o el $\mathcal{F}$–valor de Shapley cuando se esté considerando un juego con cooperación parcial. Para ello, se utilizarán algunos resultados de capítulos precedentes.

En la primera sección, se definen los juegos de votación ponderada, su forma habitual de representarlos y se pone de manifiesto su carácter de juego simple y propio. Además, se indica que, para este tipo de juegos, siempre coinciden las funciones características asociadas a un juego con cooperación restringida y al $\mathcal{F}$–juego restringido por un sistema de partición.

En la primera aplicación, se analiza la relación población/votos/poder para las quince naciones que forman actualmente la Unión Europea. Bilbao y López estudian esta situación en [7], comparando los índices de poder de las naciones en la Europa de los doce con la posible ampliación a dieciséis miembros. Ahora bien, la negativa de Noruega a incorporarse a la Unión Europea, así como la discusión sobre cual debe ser la mayoría cualificada necesaria para adoptar acuerdos, hace que sea de interés este estudio ante la reforma de los sistemas de votación que estudia la Conferencia Intergubernamental Europea durante 1996.

En la tercera sección, se modela el juego de votación del Congreso de los Diputados de España en la legislatura de 1996, haciendo un estudio del poder coalicional de los diferentes partidos y realizando los cálculos tanto bajo la hipótesis de una cooperación total como parcial. En este último supuesto, se consideran dos sistemas de partición: uno, que surge de considerar la relación de orden izquierda–derecha y las coaliciones convexas que de ahí se derivan; otro, de una situación de comunicación en la que las relaciones bilaterales se modelan mediante un grafo y en el que se considerará la geometría convexa de partición constituida por los subgrafos conexos. En ambas circunstancias, se calculará el $\mathcal{F}$–valor de Shapley mediante un método indirecto y otro directo. Por último, se analiza el poder en el Parlamento de Cataluña, en la legislatura iniciada en 1995.

En la cuarta sección, se estudia el poder coalicional de los grupos parlamentarios en el Parlamento de Andalucía. Se hace notar que en las legislaturas de 1982, 1986 y 1990 no existe juego cooperativo de coaliciones, de forma que el estudio se centra en la legislatura iniciada en 1994. En ella, se analizan las estrategias competitivas de los tres partidos con poder en el juego de mayoría absoluta y se exponen los diferentes escenarios, modelados mediante grafos, que podían darse en el Parlamento Andaluz. En este contexto, se plantea el juego competitivo como una situación en la que cada partido pugna por alcanzar el escenario en el que obtenga el poder coalicional máximo. Esta situación se estudia mediante la técnica de análisis de conflictos creada por Fang, Hipel y Kilgour [28], [39]; se introducen conceptos de estabilidad y equilibrio para aplicarlos al juego coalicional, y se prueba que el único equilibrio de Nash en el juego del poder coalicional es el escenario del grafo completo.

Esta última sección concluye con los resultados de los índices de poder relativos al *order convex* y correspondientes a la nueva composición del Parlamento de Andalucía en la legislatura iniciada el 3 de Marzo de 1996.

Capítulo 2

Juegos Restringidos

2.1 Nociones básicas

Un *juego cooperativo de utilidad transferible* en un par (N, v), donde N es un conjunto finito y v es una función

$$v : 2^N \longrightarrow \mathbb{R},$$

que asigna a cada $S \subseteq N$ un número real y verifica que $v(\emptyset) = 0$.

Los elementos de $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ se denominan *jugadores*, los subconjuntos $S \in 2^N$ *coaliciones* y $v(S)$ es el *valor* de la coalición S. La función v se denomina habitualmente *función característica del juego*, siendo identificado —siempre que no haya lugar a confusión— el juego (N, v) mediante su función característica.

Ejemplo 2.1.1 Una finca rústica está valorada por su actual propietario en 50 millones de ptas. Un empresario le ofrece acondicionarla para su utilización como polígono industrial, con lo que su valor de mercado alcanzaría los 100 millones de pesetas. Otro empresario le ofrece urbanizar la finca para su posible subdivisión en parcelas destinadas a viviendas unifamiliares. Con esta urbanización, el valor de la finca estaría en los 125 millones.

Una representación del juego es definir $N = \{1, 2, 3\}$ y $v : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$, siendo

$$v(\emptyset) = 0 \ , \ v(\{1\}) = 50 \ , \ v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{2,3\}) = 0$$

$$v(\{1,2\}) = 100 \ , \ v(\{1,3\}) = 125 \ , \ v(\{1,2,3\}) = 125,$$

donde el jugador 1 representa al propietario actual y los jugadores 2 y 3 a los diferentes empresarios.

Lógicamente, aunque éste no es objetivo de esta introducción, habría que predecir que coalición se formará y como se repartirá el beneficio entre los socios.

Ejemplo 2.1.2 En un órgano colegiado de una institución, constituido por 40 personas con derecho a voz y voto, aquellos que han de pertenecer al comité ejecutivo se designan mediante el voto favorable de la mayoría absoluta de sus miembros. En esta situación, el modelo de representación del juego es $N = \{1, 2, \ldots, 40\}$, $v : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad |S| \geq 21 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} ,$$

para cualquier $S \subseteq N$.

Si $v(S) \leq v(T)$, para todo $S \subseteq T \subseteq N$, entonces se dice que el juego (N, v) es *monótono*. Puede observarse que la función característica del Ejemplo 2.1.1 cumple esta condición. Si, además, el recorrido de la función es el conjunto $\{0, 1\}$, entonces se denomina *juego simple*. Es decir, (N, v) es un *juego simple* si

$$v(S) \in \{0,1\}, \ \forall S \subseteq N \quad \text{y si} \quad S \subseteq T \Longrightarrow v(S) \leq v(T).$$

El Ejemplo 2.1.2 constituye un ejemplo clásico de juego simple, denominado juego de votación.

En general, se denotará por Γ^N al conjunto de todos los juegos cooperativos de utilidad transferible definidos sobre el conjunto finito $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Es decir

$$\Gamma^N = \{\ (N, v) \mid v : 2^N \longrightarrow \mathbb{R},\ v(\emptyset) = 0\},$$

y se denotará $\mathcal{S}^N$ para simbolizar al conjunto de juegos simples definidos sobre N. Obviamente $\mathcal{S}^N \subset \Gamma^N$.

En el conjunto Γ^N, se introducen las operaciones

$$+\ :\ \Gamma^N \times \Gamma^N \longrightarrow \Gamma^N, \quad (v, w) \longmapsto v + w$$

$$.\ :\ \mathbb{R} \times \Gamma^N \longrightarrow \Gamma^N, \quad (\alpha, v) \longmapsto \alpha.v$$

definidas por

$$(v + w)(S) = v(S) + w(S), \quad (\alpha.v)(S) = \alpha.v(S),$$

para cualquier $S \subseteq N$. Con respecto a estas operaciones, la terna $(\Gamma^N, +, .)$ constituye un espacio vectorial $(2^n - 1)$–dimensional. Una base está formada por el conjunto

$$\{u_T \in \Gamma^N \mid T \subseteq N,\ T \neq \emptyset\},$$

siendo

$$u_T(S) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad T \subseteq S \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Estos juegos $u_T \in \Gamma^N$, se denominan *juegos de unanimidad.*

El juego (N, v), es llamado *cero–normalizado*, *cero–monótono*, *aditivo* o *superaditivo*, respectivamente, si su función característica, v, verifica la correspondiente condición:

(a) $v(\{i\}) = 0$, para todo elemento $i \in N$.

(b) $v(S) + \sum_{i \in T \setminus S} v(\{i\}) \leq v(T)$, para toda $S \subseteq T \subseteq N$.

(c) $v(S \cup T) = v(S) + v(T)$, para toda $S, T \subseteq N$, con $S \cap T = \emptyset$.

(d) $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$, para toda $S, T \subseteq N$, $S \cap T = \emptyset$.

Por $\mathcal{Q}^N$ se denotará al conjunto de juegos superaditivos. Este conjunto es no vacío (los juegos de unanimidad son superaditivos) y verifica que

(a) Si $v \in \mathcal{Q}^N$ y $w \in \mathcal{Q}^N$, entonces $v + w \in \mathcal{Q}^N$.

(b) Si $\alpha \geq 0$ y $v \in \mathcal{Q}^N$, entonces $\alpha.v \in \mathcal{Q}^N$.

El juego (N, v) se dice que es *convexo* si la función característica es *supermodular*. Esto es, si

$$v(S \cup T) + v(S \cap T) \geq v(S) + v(T), \ \forall S, T \in 2^N.$$

Obviamente, si (N, v) es convexo, también es superaditivo.

Una de las ideas básicas en la teoría de juegos cooperativos de utilidad transferible es que, dado un juego (N, v) y suponiendo que se llega a algún tipo de entendimiento entre los jugadores, se reparte la ganancia total, $v(N)$, de la gran coalición N entre ellos. De ahí que una distribución de la cantidad $v(N)$ entre los jugadores es representada por una función con valores reales x sobre el conjunto de jugadores N, la cual satisface el *principio de eficiencia*:

$$\sum_{i \in N} x_i = v(N),$$

donde x_i representa el pago al jugador i con la función x. Normalmente se identifica la función x sobre N con una n–upla de números reales $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Los vectores $x \in \mathbb{R}^n$ que satisfacen el principio de eficiencia son llamados *vectores de pago eficientes* o *pre–imputaciones* para el juego (N, v).

Ahora bien, la mayoría de los conceptos de solución propuestos para juegos cooperativos de n–personas requieren que los vectores de pago eficientes cumplan el llamado *principio de individualidad racional*, el cual exige que el pago a cada jugador i por el vector de pago x sea al menos la cantidad que el jugador puede obtener por sí mismo en el juego. Es decir,

$$x_i \geq v(\{i\}), \quad \text{para todo } i \in N.$$

Las preimputaciones que verifican este principio de individualidad racional se llaman *imputaciones* para el juego (N, v).

El *core* del juego (N, v) es el conjunto:

$$C(N,v) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid x(N) = v(N), \;\; x(S) \geq v(S), \forall S \in 2^N \setminus \emptyset \,\},$$

donde $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$.

Esta idea del *core* de un juego fue introducida por Gillies [30] y pueden darse ejemplos de juegos en los que el *core* es vacío. No obstante, hay clases de juegos cooperativos de utilidad transferible para los que el *core* es no vacío. A este respecto, merece destacarse el conjunto de juegos convexos.

En el estudio de las condiciones que determinan si el juego tiene o no un *core* vacío, Shapley introdujo el concepto de *coaliciones equilibradas* y de *juego equilibrado*.

Sea (N, v) un juego. Una colección $\{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ de subconjuntos de N, distintos y no vacíos, se dice que es *equilibrada sobre* N si existen números positivos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ —denominados *pesos*— tales que, para todo $i \in N$,

$$\sum_{\{j:\, i \in S_j\}} \alpha_j = 1.$$

Si, para cualquier colección equilibrada sobre N, se verifica que

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j v(S_j) \leq v(N),$$

entonces se dice que el juego (N, v) es *equilibrado*.

Bondareva [11] y Shapley [58] demuestran que la clase de juegos equilibrados coincide con la clase de juegos de core no vacío.

Cercano al concepto de juego equilibrado está la noción de equilibrio total. Un juego (N, v) se dice *totalmente equilibrado* si los subjuegos inducidos (S, v_S) son equilibrados para toda $S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$. Aquí se entiende por subjuego inducido (S, v_S) aquel cuya función característica viene determinada por

$$v_S(T) = v(T), \ \forall T \subseteq S.$$

En cualquier juego (N, v), las diferentes coaliciones de N junto con la relación de inclusión forman un conjunto parcialmente ordenado: $(2^N, \subseteq)$. Debido a ello y a que se quieren introducir técnicas combinatorias de enumeración para obtener generalizaciones en juegos de n–personas con cooperación parcial, es necesario presentar aquellos conceptos referentes a los conjuntos parcialmente ordenados que vayan a utilizarse. También, se expondrán algunos conceptos relativos al Álgebra de Incidencia de un conjunto parcialmente ordenado y localmente finito así como, de manera especial, resultados asociados a la Fórmula de Inversión de Möbius de los que se hará uso en este capítulo y en los posteriores [62] [55]. En adelante, se utilizarán las notaciones de Stanley [62].

Un *conjunto parcialmente ordenado* es un par $(P, \leq_P)$ en el que P es un conjunto y $\leq_P$ es una relación binaria establecida en P que satisface las propiedades *reflexiva*, *antisimétrica* y *transitiva*.

En lo que sigue, haciendo un abuso de notación y siempre que no haya lugar a equívoco, se denotará por P al conjunto parcialmente ordenado y por $\leq$ a la relación de orden establecida en P. Se dice que $\hat{1} \in P$ es *último elemento* de P si $x \leq \hat{1}$ para todo $x \in P$. Similarmente, se dice que $\hat{0} \in P$ es *primer elemento* de P si $\hat{0} \leq x$ para todo $x \in P$.

Dos conjuntos parcialmente ordenados P y Q son *isomorfos* si existe una aplicación biyectiva entre ellos que conserva el orden. Es decir, $P \simeq Q$, si existe $f : P \longrightarrow Q$ biyectiva tal que

$$x \leq y \text{ en } P \iff f(x) \leq f(y) \text{ en } Q.$$

Si $Q \subseteq P$, puede definirse un orden parcial en Q denominado *orden inducido* de la siguiente forma: para $x, y \in Q$, $x \leq y$ en Q si y sólo si $x \leq y$ en P. Por ello, $(Q, \leq)$ se denomina *subconjunto parcialmente ordenado inducido* por $(P, \leq)$. Es claro que existen $2^{|P|}$ subconjuntos parcialmente ordenados e inducidos por P y unos casos especiales lo constituyen las *cadenas* y los *intervalos cerrados*.

Una *cadena* C de P es un subconjunto parcialmente ordenado inducido en el cual dos elementos cualesquiera son siempre comparables; es decir,

$$C \subseteq P \text{ es una cadena si para todo } x, y \in C,\ x \leq y \quad \text{o} \quad y \leq x.$$

Un *intervalo cerrado* $[x, y] \subseteq P$ se define como

$$[x, y] = \{\ z \in P \mid x \leq z \leq y\ \}.$$

Es evidente que la definición de intervalo cerrado tiene sentido solamente cuando $x \leq y$. El intervalo cerrado es un subconjunto parcialmente ordenado inducido por P con primer y último elemento, y no constituye necesariamente una cadena. Para todo $x \in P$, el intervalo $[x, x]$ es el conjunto unitario $\{x\}$. Si cualquier intervalo cerrado de $(P, \leq)$ es finito, se dice que $(P, \leq)$ es *localmente finito*.

Si $x, y \in P$, se dice que *y cubre a x* si $x < y$ y no hay ningún elemento $z \in P$ que cumpla la condición de ser $x < z < y$. Esto es, *y cubre a x* si y sólo si

$$x < y \quad \text{y} \quad [x, y] = \{x, y\}.$$

Un conjunto parcialmente ordenado y localmente finito está completamente determinado por la relación *cubrir* y a partir de esta relación se representa el diagrama de un conjunto parcialmente ordenado, denominado *diagrama de Hasse*.

Otra clase particular de subconjuntos parcialmente ordenados inducidos por P, lo forman los llamados *ideales del orden de* P. Se dice que $I \subseteq P$ es un *ideal del orden de* P cuando

$$\forall x \in I \text{ , si } y \leq x \Longrightarrow y \in I.$$

En particular, sea $x \in P$. El par $(\Lambda_x, \leq)$, donde

$$\Lambda_x =< x >= \{ \; y \in P \mid y \leq x \; \},$$

se denomina *ideal principal del orden generado por* x.

Sea $B \subseteq P$, $B \neq \emptyset$, donde P es un conjunto parcialmente ordenado. Un elemento $c \in P$ se denomina *cota superior* de B siempre que $b \leq c$, para todo $b \in B$. Si además, para todo $b \in B$, la relación $b \leq v$ implica que $c \leq v$, entonces se dice que el elemento $c \in P$ es el *supremo* del conjunto B. De un modo dual se definen los conceptos de *cota inferior* y de *ínfimo* del conjunto B. El supremo y el ínfimo del conjunto B se simbolizan por $\sup_P B$ e $\inf_P B$ respectivamente, omitiéndose el subíndice siempre que no haya una posible confusión. Si en un conjunto parcialmente ordenado $(P, \leq)$ existen el supremo y el ínfimo de cualquier pareja de elementos de P, entonces se dice que $(P, \leq)$ es un *retículo*. Usualmente, se denota:

$$a \wedge b = \inf \{a, b\}, \quad a \vee b = \sup \{a, b\}$$

Se pueden definir varias operaciones entre conjuntos parcialmente ordenados. De ellas, interesa resaltar aquí el *producto directo o cartesiano* de dos conjuntos parcialmente ordenados P y Q. Se define el *producto cartesiano o directo* de $(P, \leq)$ y $(Q, \leq)$, como otro conjunto parcialmente ordenado que se denota por $(P \times Q, \leq)$ en el que

$$P \times Q = \{ \; (x, y) \mid x \in P, \; y \in Q \; \} \quad \text{y}$$

$$(x, y) \leq (x', y') \text{ en } P \times Q \text{ si } x \leq x' \text{ en } P \text{ e } y \leq y' \text{ en } Q.$$

A continuación, tal como se indicó, se exponen algunos conceptos relativos al Álgebra de Incidencia de un conjunto parcialmente ordenado localmente finito y a la Fórmula de Inversión de Möbius.

Sea P un conjunto parcialmente ordenado y localmente finito y $\mathbb{K}$ un cuerpo de característica nula (usualmente $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Se dice que

$$f \ : \ P \times P \longrightarrow \mathbb{K},$$

es una *función de incidencia de* P *sobre* $\mathbb{K}$ si $f(x,y) = 0$ cuando $x \not\leq y$. Esta definición implica que una función de incidencia es forzosamente nula cuando se evalua sobre pares que no constituyen intervalos de P. Se denotará por $I(P,\mathbb{K})$ al conjunto formado por las funciones de incidencia de P sobre $\mathbb{K}$. En este conjunto, se definen las operaciones

$$+ \ : \ I(P,\mathbb{K}) \times I(P,\mathbb{K}) \longrightarrow I(P,\mathbb{K}), \quad (f,g) \longmapsto f+g$$

$$. \ : \ \mathbb{K} \times I(P,\mathbb{K}) \longrightarrow I(P,\mathbb{K}), \quad (\alpha, f) \longmapsto \alpha.f$$

$$* \ : \ I(P,\mathbb{K}) \times I(P,\mathbb{K}) \longrightarrow I(P,\mathbb{K}), \quad (f,g) \longmapsto f*g,$$

definidas por

$$(f+g)(x,y) = f(x,y) + g(x,y), \quad (\alpha.f)(x,y) = \alpha.f(x,y)$$

$$(f*g)(x,y) = (fg)(x,y) = \sum_{\{z \,:\, x \leq z \leq y\}} f(x,z)g(z,y),$$

para cualquier $(x,y) \in P \times P$. Nótese que la segunda operación interna introducida está bien definida, ya que P es localmente finito, y es asociativa y distributiva respecto de la suma de funciones de incidencia. Suele denominarse *producto de convolución* y, además, tiene como elemento neutro a la función δ de Kronecker

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = y \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Con respecto a las operaciones definidas, $(I(P, \mathbb{K}), +, ., *)$ constituye un álgebra sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ designada habitualmente por *Álgebra de Incidencia* $I(P, \mathbb{K})$.

Una función de $I(P, \mathbb{K})$ es la *función zeta* ζ, definida por

$$\zeta(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq y \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Obsérvese que para un determinado conjunto finito N, el par $(2^N, \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado y localmente finito. En este caso, fijada cualquier $S \in 2^N$, $S \neq \emptyset$, la *función zeta* daría lugar a la función

$$\zeta_S \,:\, 2^N \longrightarrow \mathbb{R},\ \zeta_S(T) = \zeta(S,T) = \begin{cases} 1, & \text{si } S \subseteq T \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

que puede reconocerse como un *juego de unanimidad*. Esta forma de interpretar los juegos de unanimidad es utilizada por Faigle y Kern [26].

Stanley [62, Proposición 3.6.2] prueba que si $f \in I(P, \mathbb{K})$, la función inversa (para la operación de convolución) existe si y sólo si $f(x,x) \neq 0$, para todo $x \in P$. Ello implica, de forma inmediata, que la *función zeta* posee inversa; dicha función inversa se denomina *función de Möbius de P* y se simboliza por μ (μ_P cuando existe alguna posibilidad de confusión). Es decir $\zeta\mu = \mu\zeta = \delta$ y su cálculo puede realizarse mediante las siguientes fórmulas recurrentes

$$\mu(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = y \\ -\displaystyle\sum_{\{z \,\mid\, x \leq z < y\}} \mu(x,z), & \text{si } x < y \text{ en } P. \end{cases}$$

En general, si los conjuntos parcialmente ordenados $(P, \leq)$ y $(Q, \leq)$ son localmente finitos e isomorfos se verifica que

$$\zeta_P(x,y) = \zeta_Q(f(x), f(y)), \quad \mu_P(x,y) = \mu_Q(f(x), f(y)) \,,$$

siendo $\zeta_P, \mu_P \in I(P, \mathbb{K})$ y $\zeta_Q, \mu_Q \in I(Q, \mathbb{K})$ las respectivas *funciones zeta* y *de Möbius* así como f es la biyección existente entre P y Q que preserva el orden.

Como resultado fundamental relacionado con la *función de Möbius* hay que resaltar la *Fórmula de Inversión de Möbius* [62, Proposición 3.7.1] la cual establece que si P es un conjunto parcialmente ordenado en donde cualquier *ideal principal del orden* es finito y si $f, g \; : \; P \longrightarrow \mathbb{C}$, entonces para todo $x \in P$, se tiene

$$g(x) = \sum_{y \leq x} f(y) \iff f(x) = \sum_{y \leq x} \mu(y, x) g(y).$$

Otro resultado que será necesario considerar es el *Teorema del Producto* [62, Proposición 3.8.2] que establece una relación entre las *funciones de Möbius* correspondientes a las álgebras de incidencia de dos conjuntos parcialmente ordenados y localmente finitos $I(P, \mathbb{K})$, $I(Q, \mathbb{K})$, y la *función de Möbius* definida en $I(P \times Q, \mathbb{K})$. En efecto, si $(P, \leq)$ y $(Q, \leq)$ son conjuntos parcialmente ordenados locamente finitos y $(x, y) \leq (x', y')$ en $P \times Q$, entonces

$$\mu_{P \times Q}((x, y), (x', y')) = \mu_P(x, x')\mu_Q(y, y').$$

Por último, si $\mathcal{L}$ es un retículo finito y $\hat{1} \neq a \in \mathcal{L}$, entonces, una consecuencia inmediata de [62, Corolario 3.9.3] es que

$$\sum_{x \in \mathcal{L}} \mu(x, \hat{1}) = 0.$$

2.2 Juegos con cooperación restringida

En la introducción se ha justificado la necesidad de investigar modelos más generales de juegos cooperativos en los que la cooperación entre los jugadores esté condicionada, ya que la realidad de las aplicaciones exige la interpretación de posibilidades intermedias entre la cooperación total y la no cooperación.

En esta sección se estudian las propiedades de los juegos cooperativos en los que la cooperación es parcial y está limitada por una colección prescrita de coaliciones, las cuales se denominarán *coaliciones factibles* del juego. Dicho conjunto no tendrá, en principio, ninguna estructura predeterminada.

Definición 2.2.1 *Un sistema de coaliciones factibles es un par* $(N, \mathcal{F})$, $\mathcal{F} \subseteq 2^N$, *que satisface el siguiente axioma:*

$(P1)$ $\emptyset \in \mathcal{F}$, *y el conjunto* $\{i\} \in \mathcal{F}$ *para todo* $i \in N$.

Teniendo en cuenta la definición dada, resulta que cualquier coalición $S \subseteq N$ puede expresarse como unión disjunta de *coaliciones factibles* ya que

$$S = \bigcup\nolimits_{a \in S} \{a\}.$$

Ahora bien, esta partición de S en *coaliciones factibles* no tiene por qué ser única tal como puede observarse en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.2.2 Sean $N = \{1, 2, 3, 4\}$ y

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}.$$

El par $(N, \mathcal{F})$ es un *sistema de coaliciones factibles.* Si se considera la coalición $S = \{1, 3, 4\} \subseteq N$ entonces

$$\Pi_1 = \{\{1\}, \{3\}, \{4\}\}\ ,\ \Pi_2 = \{\{1, 3\}, \{4\}\}\ ,\ \Pi_3 = \{\{1\}, \{3, 4\}\}\ ,$$

son diferentes particiones de S en *coaliciones factibles.*

En general, se denotará por $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(S)$, $S \neq \emptyset$, al conjunto formado por todas las particiones de $S \subseteq N$ en coaliciones factibles no vacías. Obviamente $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

El razonamiento anterior da consistencia y sentido al concepto de *juego con cooperación restringida.*

Definición 2.2.3 *Sea la terna $(N, \mathcal{F}, v)$, donde $(N, \mathcal{F})$ es un sistema de coaliciones factibles y (N, v) un juego de utilidad transferible. Se denomina juego con cooperación restringida por el sistema de coaliciones factibles $(N, \mathcal{F})$, al par $(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}})$ donde*

$$\tilde{v}^{\mathcal{F}} : 2^N \longrightarrow \mathrm{I\!R}, \quad \tilde{v}^{\mathcal{F}}(S) = \text{máx} \left\{ \sum_i v(T_i) \mid \{T_i\} \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(S) \right\}.$$

Ejemplo 2.2.4 Sea la terna $(N, \mathcal{F}, v)$, donde $(N, \mathcal{F})$ es un sistema de coaliciones factibles dado por

$$N = \{1, 2, 3\}, \quad \mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 3\}\},$$

y v es la función característica tal que, para $S \subseteq N$, resulta ser

$$v(S) = \begin{cases} 2, & \text{si } |S| \geq 2 \\ 1/2, & \text{si } |S| = 1 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En esta situación, el *juego con cooperación restringida* por el sistema de coaliciones factibles, $(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}})$, queda determinado de la siguiente forma:

S	$\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(S)$	$\tilde{v}^{\mathcal{F}}(S)$
$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	0
$\{1\}$	$\{\{1\}\}$	$1/2$
$\{2\}$	$\{\{2\}\}$	$1/2$
$\{3\}$	$\{\{3\}\}$	$1/2$
$\{1, 2\}$	$\{\{1\}, \{2\}\}$	$1/2 + 1/2 = 1$
$\{1, 3\}$	$\{\{1\}, \{3\}\},\ \{\{1, 3\}\}$	$\text{máx}\{1/2 + 1/2, 2\} = 2$
$\{2, 3\}$	$\{\{2\}, \{3\}\}$	$1/2 + 1/2 = 1$
$\{1, 2, 3\}$	$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\},\ \{\{2\}, \{1, 3\}\}$	$\text{máx}\{3/2, 1/2 + 2\} = 5/2$

La definición dada de *juego de cooperación restringida por un sistema de coaliciones factibles* es una extensión, a cualquier coalición de jugadores, de la utilizada por Faigle en el estudio de juegos con cooperación restringida [25] y por Bergantiños, Carreras y García–Jurado [6] cuando consideran grafos de comunicación para reflejar situaciones de incompatibilidad entre algunos jugadores.

Es inmediato observar que

$$\tilde{v}^{\mathcal{F}}(S) \geq \sum_{i \in S} v(\{i\}).$$

Además, el juego así definido es siempre superaditivo y hay que exigir pocas condiciones al juego (N, v) para que el correspondiente juego restringido $(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}})$ sea monótono. En efecto:

Proposición 2.2.5 *Sea la terna $(N, \mathcal{F}, v)$, siendo $(N, \mathcal{F})$ un sistema de coaliciones factibles y (N, v) un juego de utilidad transferible. El juego de cooperación restringida $(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}})$ verifica que*

(a) Es superaditivo y, por consiguiente, cero–monótono.

(b) Si (N, v) es cero–normalizado, entonces $(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}})$ es cero–normalizado y monótono.

(c) Si $v(S) \geq 0$, $\forall S \subseteq N$, entonces $(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}})$ es monótono.

Demostración: (a) Sean $S, T \subseteq N$, con $S \cap T = \emptyset$. Por definición

$$\tilde{v}^{\mathcal{F}}(S) + \tilde{v}^{\mathcal{F}}(T) = \max\{\sum_i v(S_i)\} + \max\{\sum_j v(T_j)\},$$

donde $\{S_i\}_i$ y $\{T_j\}_j$ recorren todas las posibles particiones de S y T en coaliciones factibles de N. Como los máximos se alcanzarán para dos determinadas particiones, se tendrá que

$$\tilde{v}^{\mathcal{F}}(S) + \tilde{v}^{\mathcal{F}}(T) = \sum_i v(S_i^*) + \sum_j v(T_j^*),$$

y, al ser $\{S_i^*, T_j^*\}_{i,j}$ una partición de $S \cup T$ en coaliciones factibles de N, se verifica

$$\sum_i v(S_i^*) + \sum_j v(T_j^*) \leq \text{máx}\{\sum_k v(D_k)\} = \tilde{v}^{\mathcal{F}}(S \cup T),$$

donde $\{D_k\}_k$ son las particiones de $S \cup T$ en coaliciones factibles. Por tanto, se verifica que $\tilde{v}^{\mathcal{F}}(S) + \tilde{v}^{\mathcal{F}}(T) \leq \tilde{v}^{\mathcal{F}}(S \cup T)$.

Por otra parte, $(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}})$ es cero–monótono como consecuencia directa de ser superaditivo. En efecto, si $S \subset T \subseteq N$, entonces $T = S \cup (T \setminus S)$ y al ser $(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}})$ superaditivo

$$\tilde{v}^{\mathcal{F}}(T) = \tilde{v}^{\mathcal{F}}(S \cup (T \setminus S)) \geq \tilde{v}^{\mathcal{F}}(S) + \tilde{v}^{\mathcal{F}}(T \setminus S).$$

Aplicando reiteradamente la superaditividad (N es finito),

$$\tilde{v}^{\mathcal{F}}(T) \geq \tilde{v}^{\mathcal{F}}(S) + \tilde{v}^{\mathcal{F}}(T \setminus S) \geq \tilde{v}^{\mathcal{F}}(S) + \sum_{i \in T \setminus S} \tilde{v}^{\mathcal{F}}(\{i\}).$$

(b) Para cualquier elemento $a \in N$, se tiene que $\tilde{v}^{\mathcal{F}}(\{a\}) = v(\{a\}) = 0$ ya que el juego (N, v) es cero–normalizado y $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\{a\}) = \{\{a\}\}$. Debido a que $(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}})$ es cero–normalizado y cero–monótono, resulta que si $S \subset T \subseteq N$:

$$\tilde{v}^{\mathcal{F}}(T) \geq \tilde{v}^{\mathcal{F}}(S) + \tilde{v}^{\mathcal{F}}(T \setminus S) \geq \tilde{v}^{\mathcal{F}}(S) + \sum_{i \in T \setminus S} \tilde{v}^{\mathcal{F}}(\{i\}) = \tilde{v}^{\mathcal{F}}(S).$$

(c) Siguiendo un razonamiento análogo al anterior, si $S \subset T$, entonces

$$\tilde{v}^{\mathcal{F}}(T) \geq \tilde{v}^{\mathcal{F}}(S) + \tilde{v}^{\mathcal{F}}(T \setminus S) \geq \tilde{v}^{\mathcal{F}}(S),$$

ya que, por hipótesis, $\tilde{v}^{\mathcal{F}}(T \setminus S) \geq 0$. $\square$

Obsérvese que, en los apartados (b) y (c) de la proposición anterior, es fundamental que el juego $(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}})$ sea siempre superaditivo.

Corolario 2.2.6 *Si (N, v) es monótono, el juego de cooperación restringida $(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}})$ también lo es.*

Es una consecuencia inmediata ya que la monotonía del juego v y el hecho de ser $v(\emptyset) = 0$ dan lugar a que $v(S) \geq 0$, $\forall S \subseteq N$.

Proposición 2.2.7 *Sea la terna $(N, \mathcal{F}, v)$, siendo $(N, \mathcal{F})$ un sistema de coaliciones factibles y (N, v) un juego de utilidad transferible superaditivo. El juego de cooperación restringida $(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}})$ verifica que*

(a) $\tilde{v}^{\mathcal{F}}(T) \leq v(T)$, para todo $T \subseteq N$.

(b) Si $T \in \mathcal{F}$, entonces $\tilde{v}^{\mathcal{F}}(T) = v(T)$.

Demostración: (a) Por definición

$$\tilde{v}^{\mathcal{F}}(T) = \max\left\{\sum_i v(T_i) \mid \{T_i\}_i \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(T)\right\}.$$

Como cada $\{T_i\}_i$ es una partición de T y el juego (N, v) es superaditivo

$$\sum_i v(T_i) \leq v(\bigcup_i T_i) = v(T), \quad \text{para cada partición } \{T_i\}_i.$$

Luego, $\tilde{v}^{\mathcal{F}}(T) \leq v(T)$.

(b) Si $T \in \mathcal{F}$, entonces $\{T\} \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(T)$. Por tanto

$$v(T) \leq \max\left\{\sum_i v(T_i)\right\} = \tilde{v}^{\mathcal{F}}(T) \leq v(T).$$

Es decir, $\tilde{v}^{\mathcal{F}}(T) = v(T)$. □

En las anteriores proposiciones, se ha puesto de manifiesto que el juego restringido $(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}})$ siempre es superaditivo y cero–monótono. Además, que la propiedad de ser cero–normalizado y monótono del juego (N, v) se transmite al juego con cooperación restringida por un sistema de coaliciones factibles. Sin embargo, si (N, v) es un juego simple, no puede asegurarse que lo sea el juego $(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}})$. Ello puede observarse en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.2.8 Sea la terna $(N, \mathcal{F}, v)$ con $|N| \geq 2$, $(N, \mathcal{F})$ un sistema de coaliciones factibles y (N, v) un juego definido por:

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{si } S \in \mathcal{F},\ S \neq \emptyset \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En este caso, si $S \subseteq N$ y $|S| = 2$ resulta que $\tilde{v}^{\mathcal{F}}(S) \notin \{0, 1\}$. Ello es debido a que la definición de $(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}})$ y el axioma (P1) implican que

$$\tilde{v}^{\mathcal{F}}(S) \geq \sum_{i \in S} v(\{i\}) = |S| = 2.$$

Ahora bien, si el juego simple (N, v) es *propio* (es decir, no existen coaliciones $S, T \subseteq N$, con $S \cap T = \emptyset$ que verifiquen el ser $v(S) = v(T) = 1$), entonces también lo es el correspondiente juego de cooperación restringida por un sistema de coaliciones factibles.

Proposición 2.2.9 *Sea la terna $(N, \mathcal{F}, v)$, siendo $(N, \mathcal{F})$ un sistema de coaliciones factibles y (N, v) un juego simple propio. El juego de cooperación restringida $(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}})$ verifica que*

(a) $(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}})$ *es simple.*

(b) $\tilde{v}^{\mathcal{F}}(S) = \max\{v(T_i) \mid T_i \subseteq S,\ T_i \in \mathcal{F}\}$.

(c) $(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}})$ *es propio.*

Demostración: (a) Como el juego (N, v) es monótono, por el Corolario 2.2.6, $(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}})$ también lo es. Por lo tanto, únicamente hay que probar que $\tilde{v}^{\mathcal{F}}(S) \in \{0, 1\}$, para cualquier $S \subseteq N$.

En efecto, sea $S \subseteq N$. Por definición

$$\tilde{v}^{\mathcal{F}}(S) = \max\left\{\sum_i v(T_i) \mid \{T_i\} \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(S)\right\}.$$

Sea $\{T_i\}_i \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(S)$. Para cada i, o bien $v(T_i) = 0$ o $v(T_i) = 1$. Si algún $T_k \in \{T_i\}_i$ es tal que $v(T_k) = 1$, entonces $v(T_j) = 0$ para $T_j \in \{T_i\}_i$, $j \neq k$.

Ello es debido a que el juego (N, v) es simple y propio, lo cual significa que no existen dos coaliciones disjuntas cuyos valores sean simultaneamente igual a 1. Por tanto,

$$\sum_i v(T_i) \in \{0,1\}\ ,\ \forall \{T_i\}_i \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(S) \quad \Longrightarrow \quad \tilde{v}^{\mathcal{F}}(S) \in \{0,1\}.$$

(b) Teniendo en cuenta el razonamiento anterior, es obvio que

$$\tilde{v}^{\mathcal{F}}(S) = \text{máx}\{v(T_i) \mid T_i \subseteq S,\ T_i \in \mathcal{F}\}.$$

(c) El juego $(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}})$ es propio ya que si existieran dos coaliciones disjuntas $S, T \subseteq N$ tal que $\tilde{v}^{\mathcal{F}}(S) = \tilde{v}^{\mathcal{F}}(T) = 1$, entonces, dado que $(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}})$ es superaditivo, se tiene

$$\tilde{v}^{\mathcal{F}}(S) + \tilde{v}^{\mathcal{F}}(T) = 1 + 1 \leq \tilde{v}^{\mathcal{F}}(S \cup T),$$

en contradicción con que $\tilde{v}^{\mathcal{F}}(S \cup T) \in \{0,1\}$ porque es simple. □

Al igual que el caracter de juego simple de (N, v) no siempre se transmite al correspondiente juego con cooperación restringida por un sistema de coaliciones factibles (salvo que v sea un juego simple propio), tampoco es cierto que si (N, v) es un juego convexo lo vaya a ser $(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}})$.

Ejemplo 2.2.10 Sea el juego (N, v), con $N = \{1, 2, 3\}$ y

$$v:\ 2^N \longrightarrow \mathbb{R}, \quad v(S) = \left[\sum_{i \in S} w_i\right]^2,\ v(\emptyset) = 0,$$

siendo w_i un peso determinado que se asigna a cada jugador (aquí se utilizarán $w_1 = 1$, $w_2 = 10$, $w_3 = 11$). Driessen [20] prueba que el juego (N, v) así definido es convexo siempre que $w_i \geq 0$.

Si se considera la terna $(N, \mathcal{F}, v)$, con

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}\}$$

como conjunto de coaliciones factibles, entonces el correspondiente juego de cooperación restringida $(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}})$ no es convexo.

En efecto, sean $A = \{1,2\}$, $B = \{2,3\}$. Por un lado, debido al apartado (b) de la proposición 2.2.7, ya que $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F}$, $A \cap B \in \mathcal{F}$ y (N, v) es superaditivo (por ser convexo), implican

$$\tilde{v}^{\mathcal{F}}(A) = v(A) = \left[\sum_{i\in A} w_i\right]^2 = 121,\ \tilde{v}^{\mathcal{F}}(B) = v(B) = \left[\sum_{i\in B} w_i\right]^2 = 441,$$

$$\tilde{v}^{\mathcal{F}}(A\cap B) = v(A\cap B) = \left[\sum_{i\in A\cap B} w_i\right]^2 = 100.$$

Por otro lado, $A \cup B \notin \mathcal{F}$ y

$$\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(A\cup B) = \{\ \{\{1\},\{2\},\{3\}\},\ \{\{1,2\},\{3\}\},\ \{\{1\},\{2,3\}\}\ \}$$

con lo que

$$\tilde{v}^{\mathcal{F}}(A\cup B) = \text{máx}\left\{1^2 + 10^2 + 11^2, [1+10]^2 + 11^2, 1^2 + [10+11]^2\right\} = 442$$

Finalmente, queda

$$\tilde{v}^{\mathcal{F}}(A\cup B) + \tilde{v}^{\mathcal{F}}(A\cap B) = 542 \not\geq \tilde{v}^{\mathcal{F}}(A) + \tilde{v}^{\mathcal{F}}(B) = 562$$

Este aspecto, relativo a que el caracter convexo de un juego (N, v) no se transfiere siempre al juego restringido $(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}})$, es indicado por Faigle [25] cuando busca condiciones adicionales al sistema de coaliciones factibles para que el juego sea convexo. Estas condiciones serán objeto de estudio y se pondrán de manifiesto en la siguiente sección de este capítulo.

El *core* de un juego (N, v) es

$$C(N,v) = \{\ x \in \mathbb{R}^n \mid x(N) = v(N),\ x(S) \geq v(S) \text{ para toda } S \in 2^N \setminus \emptyset\ \},$$

y si se considera un sistema de coaliciones factibles, $(N, \mathcal{F})$, es lógico preguntarse por el *core* del correspondiente juego restringido, si hay o no alguna relación entre el *core* del juego restringido y el del juego (N, v), así como si las coaliciones factibles determinan o no al *core* del juego $(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}})$. Los siguientes resultados responden a estas cuestiones.

Proposición 2.2.11 *Sea la terna $(N, \mathcal{F}, v)$, en la que $(N, \mathcal{F})$ es un sistema de coaliciones factibles y v un juego definido sobre N. Si $v(N) = \tilde{v}^{\mathcal{F}}(N)$, entonces se verifica que $C(N, v) \subseteq C(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}})$.*

Demostración: Considérese $x \in C(N, v)$. Por un lado, se tiene

$$\tilde{v}^{\mathcal{F}}(N) = v(N) = x(N).$$

Por otro, sea cualquier $S \subset N \setminus \emptyset$. Fijada una partición cualquiera de S en coaliciones factibles de $\mathcal{F}$

$$S = \bigcup_k S_k, \text{ con } S_i \cap S_j = \emptyset \ , i \neq j,$$

se tiene —debido a que cualquier $i \in S$ pertenece a una única coalición factible S_j— que

$$x(S) = \sum_{i \in S} x_i = \sum_k \left[\sum_{i \in S_k} x_i \right] = \sum_k x(S_k) \geq \sum_k v(S_k).$$

Luego, para cada $\{S_k\} \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(S)$, se tiene que

$$x(S) \geq \sum_k v(S_k),$$

con lo cual

$$x(S) \geq \max \left\{ \sum_k v(S_k) \mid \{S_k\} \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(S) \right\} = \tilde{v}^{\mathcal{F}}(S).$$

□

Nótese que la proposición anterior puede aplicarse a cualquier subjuego $(S, \tilde{v}^{\mathcal{F}}_S)$, $S \subset N \setminus \emptyset$, para el que se verifique la condición de ser $v(S) = \tilde{v}^{\mathcal{F}}(S)$. Por otro lado, si $C(N, v)$ es no vacío, la igualdad $\tilde{v}^{\mathcal{F}}(N) = v(N)$ es condición necesaria y suficiente para que se verifique la inclusión entre los *cores*.

Además, si $\tilde{v}^{\mathcal{F}}(N) \neq v(N)$ se deduce inmediatamente que la intersección $C(N, v) \cap C(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}})$ es vacía.

Teorema 2.2.12 *Sea la terna $(N, \mathcal{F}, v)$, en la que $(N, \mathcal{F})$ es un sistema de coaliciones factibles y v un juego definido sobre N. Si el juego (N, v) es equilibrado y $v(N) = \tilde{v}^{\mathcal{F}}(N)$, entonces el $\mathcal{F}$–juego restringido también lo es.*

Demostración: Bondareva [11] y Shapley [58] establecen que el juego (N, v) es equilibrado si y sólo si el *core* $C(N, v)$, es no vacío. Ello, junto con la Proposición 2.2.11, implica el resultado. □

En general, la igualdad $C(N, v) = C(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}})$ no puede asegurarse. En efecto, si se considera una imputación $x \in C(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}})$ resulta que:

$$x(S) \geq \tilde{v}^{\mathcal{F}}(S).$$

Además, si el juego (N, v) es superaditivo se cumple que, para toda $S \subseteq N$, $\tilde{v}^{\mathcal{F}}(S) \leq v(S)$ dándose la igualdad en el caso de ser $S \in \mathcal{F}$. Así, las relaciones

$$x(S) \geq \tilde{v}^{\mathcal{F}}(S) \quad \text{y} \quad \tilde{v}^{\mathcal{F}}(S) \leq v(S)$$

no implican que $x \in C(N, v)$. Por tanto, para probar que no siempre es cierta la igualdad de los *cores*, bastaría considerar un juego superaditivo (N, v), el correspondiente juego restringido por un determinado sistema de coaliciones factibles y una coalición $S \subset N$, $S \notin \mathcal{F}$, para la que se verificase la desigualdad estricta $\tilde{v}^{\mathcal{F}}(S) < v(S)$.

Las anteriores ideas se recogen en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2.13 Sea la terna $(N, \mathcal{F}, v)$, con $N = \{1, 2, 3, 4\}$,

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, N\},$$

y $v : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$, $v(S) = |S|^2$.

El juego definido es claramente superaditivo ya que para cualquier pareja de coaliciones $A, B \subseteq N$, con $A \cap B = \emptyset$, se tiene

$$v(A \cup B) = |A \cup B|^2 = (|A| + |B|)^2 \geq |A|^2 + |B|^2 = v(A) + v(B).$$

El $\mathcal{F}$–juego restringido verifica $\tilde{v}^{\mathcal{F}}(\emptyset) = 0$, y

$$\tilde{v}^{\mathcal{F}}(S) = \begin{cases} 1, & \text{si } |S| = 1 \\ 4, & \text{si } |S| = 2 \\ 5, & \text{si } |S| = 3 \\ 16, & \text{si } S = N. \end{cases}$$

El *core* del $\mathcal{F}$–juego restringido vendrá determinado por los vectores $x \in \mathbb{R}^4$ que verifiquen $x(N) = 16$ y las desigualdades

$$x(S) = \sum_{i \in S} x_i \geq \begin{cases} 1, & \text{si } |S| = 1 \\ 4, & \text{si } |S| = 2 \\ 5, & \text{si } |S| = 3. \end{cases}$$

Así, $(2,2,2,10) \in C(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}})$ y, sin embargo:

$$(x(\{1,2,3\}) = 6) \not\geq (v(\{1,2,3\}) = 9) \Longrightarrow (2,2,2,10) \notin C(N, v).$$

No obstante, el *core* del $\mathcal{F}$–juego restringido queda determinado en la siguiente proposición:

Proposición 2.2.14 *Sea la terna $(N, \mathcal{F}, v)$, en la que $(N, \mathcal{F})$ es un sistema de coaliciones factibles y v un juego definido sobre N. Si $v(N) = \tilde{v}^{\mathcal{F}}(N)$, entonces*

$$C(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}}) = \{\ x \in \mathbb{R}^n \mid x(N) = v(N),\ x(S) \geq v(S),\ \forall S \in \mathcal{F} \setminus \emptyset\ \}.$$

Demostración: Si $x \in C(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}})$, resulta que $x(N) = \tilde{v}^{\mathcal{F}}(N) = v(N)$ y, además, $x(S) \geq \tilde{v}^{\mathcal{F}}(S)$, $\forall S \in 2^N \setminus \emptyset$. Si $S \in \mathcal{F}$, entonces $\{S\} \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(S)$ y, por definición, se verifica que $\tilde{v}^{\mathcal{F}}(S) \geq v(S)$. Por tanto, resulta que

$$x(S) \geq \tilde{v}^{\mathcal{F}}(S) \geq v(S).$$

Recíprocamente, sea $S \in 2^N \setminus \emptyset$ y $\{S_k\} \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(S)$:

$$x(S) = \sum_{i \in S} x_i = \sum_k \left[\sum_{i \in S_k} x_i \right] = \sum_k x(S_k) \geq \sum_k v(S_k),$$

y, por tanto

$$x(S) \geq \max \left\{ \sum_k v(S_k) \mid \{S_k\}_k \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(S) \right\} = \tilde{v}^{\mathcal{F}}(S).$$

□

La proposición anterior puede demostrarse también como consecuencia de un resultado de Faigle [25, Lema 10], teniendo en cuenta que, en este caso, el juego restringido, $(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}})$, está definido sobre cualquier coalición de N por tratarse de un *sistema de coaliciones factibles.*

Definición 2.2.15 *Sea $(N, \mathcal{F})$ un sistema de coaliciones factibles. Sea $S \subseteq N$. Se dice que T es una $\mathcal{F}$–componente de S si se cumple que $T \in \mathcal{F}$ y no existe $T' \in \mathcal{F}$ tal que $T \subset T' \subseteq S$.*

Es decir, las *$\mathcal{F}$–componentes* de $S \subseteq N$ son las *coaliciones factibles maximales* contenidas en S.

Proposición 2.2.16 *Sea $(N, \mathcal{F})$ un sistema de coaliciones factibles. Para cualquier $S \subseteq N$, las $\mathcal{F}$–componentes de S constituyen una colección $\{T_k\}_k \subset 2^S$ tal que*

$$S = \bigcup_k T_k$$

Demostración: Para todo k, $T_k \subseteq S$, entonces su unión está necesariamente incluida en la coalición S. Además, al ser $\{a\} \in \mathcal{F}$, para todo $a \in S$, entonces o bien $\{a\} = T_k$ o bien $\{a\} \subset T_k$ para un cierto k. Ello asegura que cualquier elemento de S pertenece a una *$\mathcal{F}$–componente* de la coalición S. □

Ahora bien, las *$\mathcal{F}$–componentes* de $S \subseteq N$ no forman necesariamente una partición de S.

Ejemplo 2.2.17 Sea $(N, \mathcal{F})$ el siguiente sistema de coaliciones factibles

$$N = \{1, 2, 3, 4\}, \ \mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$$

Si $S = \{1,2,4\}$, entonces $T_1 = \{1,2\}$ y $T_2 = \{2,4\}$ son las coaliciones factibles maximales incluidas en S. Es evidente que no son disjuntas y, por tanto, las $\mathcal{F}$*–componentes* de S no dan lugar a una partición suya.

Teorema 2.2.18 *Sea la terna $(N, \mathcal{F}, v)$, siendo $(N, \mathcal{F})$ un sistema de coaliciones factibles y (N, v) un juego superaditivo. Si para cada coalición $S \subseteq N$ las $\mathcal{F}$–componentes de S forman una partición de ella, entonces el juego de cooperación restringida $(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}})$ verifica*

$$\tilde{v}^{\mathcal{F}}(S) = \sum_k v(T_k),$$

siendo $\{T_k\}_k \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}$ la partición de S en sus coaliciones factibles maximales ($\mathcal{F}$–componentes de S).

Demostración: Sea $S \subseteq N$. Por definición

$$\tilde{v}^{\mathcal{F}}(S) = \text{máx}\left\{\sum_i v(S_i) \mid \{S_i\}_i \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(S)\right\}.$$

Por hipótesis, las $\mathcal{F}$*–componentes*, $\{T_k\}_k$, de S constituyen una partición de la misma. De ahí, teniendo en cuenta que son coaliciones factibles maximales en S, resulta que cada $S_j \in \{S_i\}_i \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(S)$ está contenida en una y sólo una $\mathcal{F}$*–componente* de S. Esta relación no tiene por qué ser inyectiva aunque es sobreyectiva. Así, si se denota por $\{S_1^k, S_2^k, \ldots, S_p^k\} \subseteq \{S_i\}_i$ a aquellas coaliciones factibles de la partición $\{S_i\}_i \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(S)$ que cumplen que $S_j^k \subseteq T_k$, con $1 \leq j \leq p$, entonces

$$\bigcup_j S_j^k = T_k,$$

ya que, obviamente, $\bigcup_j S_j^k \subseteq T_k$ y, si existiera un elemento $a \in T_k$ tal que $a \notin \bigcup_j S_j^k$ resultaría que

$$a \in T_k \subseteq S \implies a \in S_t,\ S_t \neq S_j^k \implies a \in S_t \subseteq T_h,\ h \neq t,$$

con lo que $a \in T_k \cap T_h$, lo cual es contradictorio con el hecho de ser $\{T_k\}_k \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(S)$.

El razonamiento anterior implica que

$$\sum_j v(S_j^k) \leq v(\bigcup_j S_j^k) = v(T_k),$$

por ser (N, v) superaditivo. Por tanto, reagrupando todas aquellas $S_j \in \{S_i\}_i \in \mathcal{P_F}(S)$ que esten incluidas en una misma $\mathcal{F}$*−componente* y aplicando el caracter superaditivo del juego (N, v), se tiene que

$$\forall \{S_i\}_i \in \mathcal{P_F}(S), \quad \sum_i v(S_i) \leq \sum_k v(T_k),$$

con lo que $\tilde{v}^{\mathcal{F}}(S) = \sum_k v(T_k)$. □

2.3 Juegos restringidos por sistemas de partición

En el Teorema 2.2.18, se ha puesto de manifiesto que si las $\mathcal{F}$*−componentes* de cualquier coalición constituyen una partición de la misma, y el juego (N, v) es superaditivo, entonces el correspondiente juego restringido por el sistema de coaliciones factibles viene determinado por

$$\tilde{v}^{\mathcal{F}}(S) = \sum_k v(T_k),$$

donde $\{T_k\}_k$ es la partición de S en coaliciones factibles maximales.

Los trabajos de Myerson [44] y Owen [52] modelan la cooperación parcial entre los jugadores mediante grafos de comunicación, $G = (N, E(N))$, cuyo conjunto de vértices N es el formado por todos los jugadores del juego v y cuyo conjunto de aristas $E(N)$ viene dado por los acuerdos bilaterales entre los jugadores. En sus trabajos, consideran como conjunto de coaliciones factibles el formado por aquellas coaliciones $S \subseteq N$ que satisfacen que el subgrafo inducido $(S, E(S))$ es conexo. Además, aunque no supongan previamente que el juego (N, v) es superaditivo, definen el *juego restringido por un grafo de cooperación* de la misma forma que la expresada en el parágrafo anterior:

$$v^G(S) = \sum v(S_j^G),$$

donde la suma recorre todas las componentes conexas S_j^G del subgrafo inducido por $S \subseteq N$. Estas mismas ideas son asumidas por Carreras [17] al estudiar juegos simples restringidos.

Para generalizar los conceptos desarrollados por Myerson y Owen, se estudia, en esta sección, bajo qué condiciones las *$\mathcal{F}$–componentes* constituyen una partición de cualquier coalición y qué propiedades del juego (N, v) se transmiten al juego restringido cuando éste se define mediante una suma extendida a las diferentes *$\mathcal{F}$–componentes* de cada coalición.

Definicion 2.3.1 *Un sistema de partición es un par $(N, \mathcal{F})$, $\mathcal{F} \subseteq 2^N$ que satisface los siguientes axiomas:*

$(P1)$ $\emptyset \in \mathcal{F}$, $\{i\} \in \mathcal{F}$ *para todo* $i \in N$.

$(P2)$ *Para toda $S \subseteq N$, los subconjuntos maximales de S en $\mathcal{F}$ ($\mathcal{F}$–componentes de S) forman una partición de S, denotada por*

$$\Pi_S = \{S_1, \ldots, S_k\}.$$

Es evidente que un *sistema de partición* es un *sistema de coaliciones factibles*, por lo que los elementos de $\mathcal{F}$ seguirán llamándose de igual forma. Además, si $(N, \mathcal{F})$ es un sistema de partición, entonces el par $(S, \mathcal{F}')$ con $\mathcal{F}' = \{T \in \mathcal{F},\ T \subseteq S\}$ también lo es.

Ejemplo 2.3.2 Las colecciones de subconjuntos de $N = \{1, \ldots, n\}$:

$$\mathcal{F} = 2^N, \quad \text{y} \quad \mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \ldots, \{n\}\},$$

son *sistemas de partición* maximal y minimal, respectivamente.

Ejemplo 2.3.3 Sea $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, para algún número natural n, y considérese la colección $\mathcal{L}_n$ formada por todos los conjuntos de la forma $[i, j] = \{i, i+1, \ldots, j-1, j\}$ para $1 \leq i \leq j \leq n$. En este modelo, que corresponde a una situación de votación en un orden político unidimensional estudiada por Edelman [23], el par $(N, \mathcal{L}_n)$ es un *sistema de partición.*

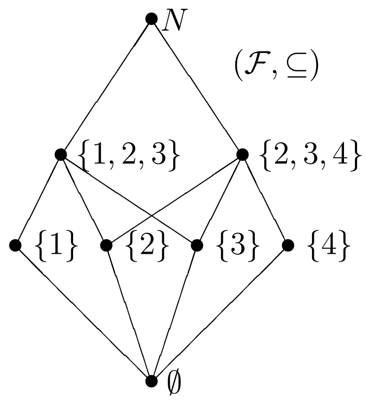
Ejemplo 2.3.4 Una *situación de comunicación* es una terna (N, G, v), donde (N, v) es un juego y $G = (N, E(N))$ es un grafo. Este concepto fue introducido por Myerson [44], e investigado por Owen [52], Borm, Nouweland y Tijs [12] [13]. Es fácil ver que el par $(N, \mathcal{F})$, donde

$$\mathcal{F} = \{S \subseteq N \mid (S, E(S)) \text{ es un subgrafo conexo de } G\},$$

es un *sistema de partición.*

Habría que resaltar que lo recíproco no siempre es cierto. En efecto, considérese el par $(N, \mathcal{F})$ donde $N = \{1, 2, 3, 4\}$ y

$$\mathcal{F} = \{\ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, N\ \}.$$



Puede comprobarse que $(N, \mathcal{F})$ constituye un sistema de partición que no coincide con la familia de subgrafos conexos de ningún grafo. Esto es debido a que cualquier grafo G se define mediante parejas $\{i, j\}$, lo cual implica que deben existir forzosamente coaliciones factibles formadas por dos elementos y, en este caso, ello estaría en contradicción con la familia de coaliciones $\mathcal{F}$ considerada.

Definición 2.3.5 *Sea la terna $(N, \mathcal{F}, v)$, donde $(N, \mathcal{F})$ es un sistema de partición y (N, v) un juego de utilidad transferible. Se denomina juego restringido por el sistema de partición $(N, \mathcal{F})$, al par $(N, v^{\mathcal{F}})$ con*

$$v^{\mathcal{F}} : \ 2^N \longrightarrow \mathbb{R}, \quad v^{\mathcal{F}}(S) = \sum_i v(S_i),$$

donde la suma está extendida a todas las coaliciones $S_i \in \Pi_S$.

Puede observarse que si en la terna $(N, \mathcal{F}, v)$, el par $(N, \mathcal{F})$ es un *sistema de partición* y el juego (N, v) es superaditivo, entonces coinciden las funciones características asociadas al *juego con cooperación restringida* y al *juego restringido por el sistema de partición.* Es decir $\tilde{v}^{\mathcal{F}} = v^{\mathcal{F}}$, aunque en general se verifica la desigualdad

$$v^{\mathcal{F}}(S) \leq \tilde{v}^{\mathcal{F}}(S), \ \forall S \subseteq N.$$

También puede notarse que las definiciones dadas anteriormente constituyen una generalización del concepto de *situación de comunicación* y de *juego restringido por un grafo de comunicación* dados por Myerson y Owen. Ahora bien, por otro lado, suponen un caso particular del concepto de *juego con estructura de cooperación* establecido por Weber [67].

En efecto, un *juego con estructura de cooperación* es un juego cooperativo (N, v) junto con una estructura de cooperación $\mathcal{P}$ la cual asocia a cada coalición $S \subseteq N$ una partición $\Pi_S \in \mathcal{P}(S)$, donde $\mathcal{P}(S)$ representa al conjunto de las posibles particiones de S. El *$\mathcal{P}$–juego restringido* $v^{\mathcal{P}}$ es definido por

$$v^{\mathcal{P}}(S) = \sum \{v(S_j) \mid S_j \in \Pi_S\}.$$

Obviamente, si $(N, \mathcal{F})$ es un *sistema de partición*, la terna $(N, \mathcal{F}, v)$ constituye un *juego con estructura de cooperación*, asociando a cada $S \subseteq N$ la partición de S en sus *$\mathcal{F}$–componentes.* Aquí, el correspondiente *$\mathcal{F}$–juego restringido* asociado a (N, v) es denotado por $(N, v^{\mathcal{F}})$.

En la siguiente proposición se contesta a la primera de las cuestiones suscitadas al inicio de esta sección, dando una caracterización para los *sistemas de partición.*

Proposición 2.3.6 *Un sistema de coaliciones factibles $(N, \mathcal{F})$, $\mathcal{F} \subseteq 2^N$ es un sistema de partición si y sólo si*

$$\forall A \in \mathcal{F}, \ B \in \mathcal{F}, \ \textit{con} \ A \cap B \neq \emptyset \implies A \cup B \in \mathcal{F}.$$

Demostración: ($\Leftarrow$) Teniendo en cuenta la Proposición 2.2.16, basta probar que cualquier par de $\mathcal{F}$*–componentes* de $A \subseteq N$ son disjuntas. Sean T_i, T_j $(i \neq j)$ coaliciones factibles maximales de A. Si $T_i \cap T_j \neq \emptyset$ significaría que, por hipótesis, $T_i \cup T_j \in \mathcal{F}$ siendo $T_i \cup T_j \subset A$. Ello contradice que T_i y T_j son coaliciones factibles maximales de A.
($\Rightarrow$) Sean $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F}$ con $A \cap B \neq \emptyset$. Si $A \cup B \notin \mathcal{F}$, resulta que

$$A \cup B = \bigcup_k T_k,$$

siendo $\{T_k\}$ la partición de $A \cup B$ en conjuntos maximales. Como A y B son coaliciones factibles contenidas en $A \cup B$, se tiene que $A \subseteq T_j$, $B \subseteq T_p$ para algún j y p. Si $j \neq p$, entonces $T_j \cap T_p = \emptyset$ y, de ahí, $A \cap B = \emptyset$ en contra de la hipótesis; luego $A \cup B \in \mathcal{F}$. Si $j = p$ queda $A \subseteq T_j \subseteq A \cup B$ y $B \subseteq T_j \subseteq A \cup B$, lo que implica que $A \cup B = T_j \in \mathcal{F}$. $\square$

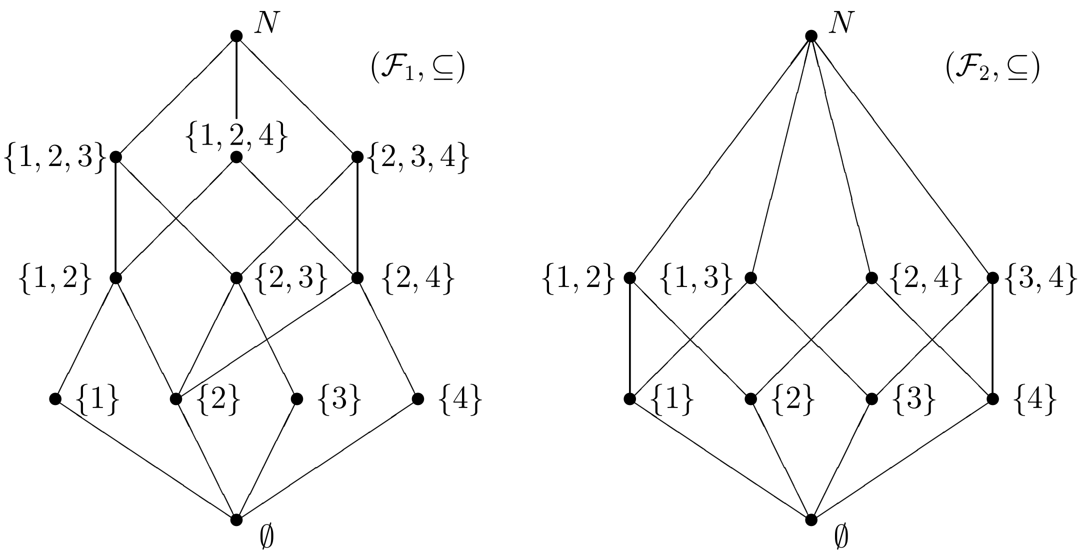


FIGURA 2.1

Ejemplo 2.3.7 Sea $N = \{1, 2, 3, 4\}$ y considérense los siguientes *sistemas de coaliciones factibles* $(N, \mathcal{F}_1)$, $(N, \mathcal{F}_2)$:

$$\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\},$$

$\{2,3,4\}, N\}$,

$$\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, N\}.$$

A través de la representación de $(\mathcal{F}_1, \subseteq)$ y $(\mathcal{F}_2, \subseteq)$ puede examinarse la caracterización, dada por la Proposición 2.3.6, de los sistemas de partición: $(N, \mathcal{F}_1)$ constituye un *sistema de partición* ya que, como puede comprobarse (ver diagramas de la Figura 2.1), siempre que dos coaliciones factibles tienen intersección no vacía, su unión es una coalición factible. El par $(N, \mathcal{F}_2)$ es un sistema de coaliciones factibles que no verifica la Proposición 2.3.6, luego no es un sistema de partición.

Haciendo un desarrollo análogo al realizado en la sección anterior, se estudian, a continuación, las propiedades de la función característica asociada al juego restringido por un sistema de partición, intentando determinar qué propiedades del juego (N, v) se trasmiten al juego $(N, v^{\mathcal{F}})$. De forma inmediata, puede establecerse que:

(a) Si $S \in \mathcal{F}$, entonces $v^{\mathcal{F}}(S) = v(S)$.

(b) Si v es *cero–normalizado* ($v(\{i\}) = 0$, $\forall i \in N$), también $v^{\mathcal{F}}$ lo es.

(c) $(v^{\mathcal{F}})^{\mathcal{F}} = v^{\mathcal{F}}$.

En los siguentes ejemplos se muestra que el carácter monótono del juego v, así como el hecho de ser un juego simple no se transmite, en general, al *$\mathcal{F}$–juego restringido* por un sistema de partición a menos que se añadan algunas hipótesis adicionales.

Ejemplo 2.3.8 Sea $N = \{1,2,3,4,5\}$ y el juego (N, v), cuya función característica viene dada por $v(\emptyset) = 0$, y

$$v(S) = \begin{cases} 1/2, & \text{si} \quad |S| < 2 \\ 1, & \text{si} \quad |S| = 2 \\ 3/2, & \text{si} \quad |S| > 2. \end{cases}$$

El juego v es monótono. Considérese la *situación de comunicación* (N, G, v), con $G = (N, E(N))$, $E(N) = \{\{1,3\},\{2,3\},\{3,4\},\{3,5\}\}$ (Figura 2.2).

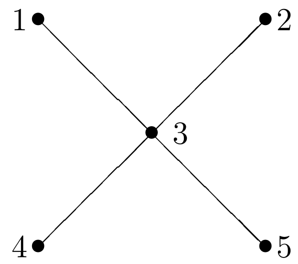


FIGURA 2.2

En esta situación, resulta que $(N, \mathcal{F})$, donde

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq N \mid (A, E(A)) \text{ es un subgrafo conexo de } G\},$$

es un *sistema de partición* y el correspondiente *$\mathcal{F}$–juego restringido* no es monótono: si $A = \{1,2,4,5\}$ y $B = N$, entonces $v^{\mathcal{F}}(A) = 2$ y $v^{\mathcal{F}}(B) = 3/2$.

Ejemplo 2.3.9 Sea $N = \{1,2,3,4,5\}$. El juego (N, v) definido por

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{si } |S| \geq 2 \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

es un juego simple (monótono y cero–normalizado). Si se considera la *situación de comunicación* (N, G, v), siendo

$$G = (N, E(N)) \ , \ E(N) = \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,5\}\}$$

y $(N, \mathcal{F})$ el mismo *sistema de partición* del ejemplo anterior, resulta que, con estas condiciones

$$v^{\mathcal{F}}(\{1,2,4,5\}) = v(\{1,2\}) + v(\{4,5\}) = 2 \notin \{0,1\}$$

y, además, no es monótono

$$A = \{1,2,4,5\} \ , \ B = \{1,2,3,4,5\} \quad \text{y} \quad v^{\mathcal{F}}(A) \not\leq v^{\mathcal{F}}(B)$$

En el ejemplo anterior, es fácil darse cuenta que el juego $(N, v^{\mathcal{F}})$ no es simple debido a la existencia, en el juego (N, v), de coaliciones disjuntas cuyo valor es igual a uno. La existencia o no de este tipo de parejas de coaliciones está estrechamente relacionada, en un juego simple, con el caracter superaditivo del juego ya que puede demostrarse que si (N, v) es un juego simple, entonces son equivalentes la *superaditividad* del juego y el caracter *propio* del mismo. Este hecho sugiere añadir la hipótesis de la superaditividad para que el *$\mathcal{F}$–juego restringido* sea simple cuando (N, v) lo sea.

Ello se mostrará como consecuencia de los resultados que se desarrollan a continuación.

Lema 2.3.10 *Sea $(N, \mathcal{F})$ un sistema de partición. Sean $A, B \subset N$ dos coaliciones disjuntas. Si $\{A_i\}_i$ y $\{B_j\}_j$ son las respectivas $\mathcal{F}$–componentes, entonces las coaliciones factibles maximales de $A \cup B$ son de la forma: $\Pi_{(A\cup B)} = \{C_t\}_t$, siendo*

$$C_t = \left(\bigcup_i A_i\right) \cup \left(\bigcup_j B_j\right) \quad \textit{para algunos } i, j,$$

o bien $C_t = A_k$ o $C_t = B_p$, para ciertos k y p.

Demostración: Sea $A_i \in \Pi_A$ (el razonamiento es similar con $B_j \in \Pi_B$). Ello quiere decir que $A_i \in \mathcal{F}$ y que es una coalición factible maximal en A. Puede que, además, sea maximal en $A \cup B$ con lo que $A_i \in \Pi_{(A\cup B)}$. Si no lo es, significa que al conjunto A_i se han de añadir ciertos elementos (N es finito) que lo convierten en una coalición factible maximal de la unión y dichos elementos no pueden ser exclusivamente pertenecientes a A ya que A_i es maximal en A. Sea, entonces, $A_i \cup \{a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_h\} \in \mathcal{F}$ siendo $\{a_1, \ldots, a_r\} \subseteq A \setminus A_i$ y $\{b_1, \ldots, b_h\} \subseteq B$ $(A \cap B = \emptyset)$. Como $a_1 \in A \setminus A_i$, puede admitirse, sin pérdida de generalidad, que $a_1 \in A_1$ $(A_i \neq A_1)$ lo que implica, teniendo en cuenta la característica fundamental de un sistema de partición (Proposición 2.3.6):

$$\left.\begin{array}{c} A_i \cup \{a_1, a_2, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_h\} \in \mathcal{F} \\ a_1 \in A_1 \in \mathcal{F} \\ (A_i \cup \{a_1, a_2, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_h\}) \cap A_1 \neq \emptyset \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$A_i \cup A_1 \cup \{a_2, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_h\} \in \mathcal{F}$.

Razonando, de igual forma, con los demás elementos se llega a que la coalición factible maximal de la unión estaría formada por

$$C_t = \left(\bigcup_i A_i\right) \cup \left(\bigcup_j B_j\right) \quad \text{para algunos } i, j.$$

$\square$

Teorema 2.3.11 *Sea la terna $(N, \mathcal{F}, v)$, en la que $(N, \mathcal{F})$ es un sistema de partición y (N, v) un juego. Sea $v^{\mathcal{F}}$ el $\mathcal{F}$–juego restringido. Si v es superaditiva, entonces*

(a) $v^{\mathcal{F}}(S) \leq v(S)$.

(b) $(N, v^{\mathcal{F}})$ *es superaditivo.*

Demostración: (a) Como v es superaditiva y las $\mathcal{F}$–componentes forman una colección finita de conjuntos disjuntos entre sí, entonces

$$v^{\mathcal{F}}(S) = \sum_k v(S_k) \leq v(\bigcup_k S_k) = v(S).$$

(b) Sean $A \subset N$, $B \subset N$ con $A \cap B = \emptyset$. Como $(N, \mathcal{F})$ es *sistema de partición*, cualquier conjunto puede expresarse como unión disjunta de sus $\mathcal{F}$–componentes:

$$A = \bigcup_k A_k, \quad B = \bigcup_p B_p.$$

Todas las $\mathcal{F}$–componentes de A y B son coaliciones factibles contenidas en $A \cup B$. Teniendo en cuenta el Lema 2.3.10, o bien algunas coaliciones factibles maximales de la unión coinciden con algunas de las de los conjuntos A, B, o bien son de la forma

$$C_t = \left(\bigcup_i A_i\right) \cup \left(\bigcup_j B_j\right) \quad \text{para algunos } i, j.$$

Reagrupando las $\mathcal{F}$–componentes de A y B, así como aplicando el carácter superaditivo del juego (N, v), se tiene

$$v^{\mathcal{F}}(A) + v^{\mathcal{F}}(B) = \sum_k v(A_k) + \sum_p v(B_p) \leq \sum_t v(C_t) = v^{\mathcal{F}}(A \cup B).$$

□

Proposición 2.3.12 *Sea la terna $(N, \mathcal{F}, v)$, en la que $(N, \mathcal{F})$ es un sistema de partición y (N, v) un juego. Sea $v^{\mathcal{F}}$ el $\mathcal{F}$–juego restringido. Si (N, v) es simple y propio, entonces*

(a) $(N, v^{\mathcal{F}})$ *es simple y propio.*

(b) $v^{\mathcal{F}}(S) = \text{máx}\{v(S_i) \mid S_i \in \Pi_S\}$.

Demostración: (a) Sea $S \subset N$. Debido al apartado (a) del Teorema 2.3.11, $v^{\mathcal{F}}(S) \leq v(S)$ y $v(S) \in \{0, 1\}$. Luego resulta que $v^{\mathcal{F}}(S) \leq 1$. Por otro lado, teniendo en cuenta que $v^{\mathcal{F}}(S) = \bigcup_k v(T_k)$ siendo $v(T_k) \in \{0, 1\}$, se tiene que $v^{\mathcal{F}}(S) \in \{0, 1\}$. Además, si $A \subseteq B \subseteq N$, el apartado (b) del Teorema 2.3.11 implica que

$$v^{\mathcal{F}}(B) \geq v^{\mathcal{F}}(A) + v^{\mathcal{F}}(B \setminus A) \geq v^{\mathcal{F}}(A)$$

con lo que es monótono. Por último, al ser $(N, v^{\mathcal{F}})$ simple y superaditivo, tiene que ser propio.

(b) Es inmediato. □

La demostración anterior podría basarse también en la igualdad entre el juego con cooperación restringida $(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}})$ y el juego restringido por un sistema de partición $(N, v^{\mathcal{F}})$ cuando el juego (N, v) es superaditivo. En efecto,

(N, v) es simple y propio, lo cual significa que es monótono y superaditivo; ello implica que $\tilde{v}^{\mathcal{F}} = v^{\mathcal{F}}$ y la Proposición 2.2.9 asegura el resultado.

La monotonía del juego (N, v) no es transmitida al juego $v^{\mathcal{F}}$ a menos que el juego (N, v) sea también superaditivo. No obstante, puede darse una condición local: Supóngase que $A \subseteq B$ y $\Pi_A = \{A_1, \ldots, A_k\}$, $\Pi_B = \{B_1, \ldots, B_p\}$ son las correspondientes particiones de A y B en sus $\mathcal{F}$*–componentes*, entonces para cada $A_i \in \Pi_A$ existe una única $B_j \in \Pi_B$ tal que $A_i \subseteq B_j$. Si esta *relación establecida entre las coaliciones factibles maximales de* A *y* B *es una–a–una* (es decir, dos componentes diferentes de A están contenidas en diferentes componentes de B) y v es un juego monótono y cero–normalizado, entonces $v^{\mathcal{F}}(A) \leq v^{\mathcal{F}}(B)$ ya que

$$v^{\mathcal{F}}(A) = \sum_{i=1}^{k} v(A_i) \leq \sum_{\{B_j\colon A_i \subseteq B_j\}} v(B_j) \leq \sum_{j=1}^{p} v(B_j) = v^{\mathcal{F}}(B).$$

A continuación, siguiendo las ideas utilizadas por Nouweland [50] se dan las condiciones que ha de cumplir un sistema de partición para que el *core* del juego restringido no sea vacío cuando no lo sea el *core* del juego (N, v).

Proposición 2.3.13 *Sea la terna* $(N, \mathcal{F}, v)$*, en la que* $(N, \mathcal{F})$ *es un sistema de partición y* (N, v) *un juego. Entonces:*

(a) Si $v(N) = v^{\mathcal{F}}(N)$*, entonces se cumple que* $C(N, v) \subseteq C(N, v^{\mathcal{F}})$*.*

(b) Para toda $S \in \mathcal{F}$ *se verifica que* $C(S, v_S) \subseteq C(S, v_S^{\mathcal{F}})$*.*

Demostración: (a) Sea $x \in C(N, v)$. En primer lugar se tiene

$$v^{\mathcal{F}}(N) = v(N) = x(N).$$

Por otro lado, si $S \subset N$, $S \neq \emptyset$, entonces

$$v^{\mathcal{F}}(S) = \sum_{k} v(S_k) \leq \sum_{k} \left(\sum_{i \in S_k} x_i \right) = \sum_{i \in S} x_i = x(S),$$

ya que las $\mathcal{F}$–componentes de S forman una partición de S.

(b) Si $S \in \mathcal{F}$, entonces $v(S) = v^{\mathcal{F}}(S)$. Debido al apartado anterior y al concepto de subjuego, resulta inmediatamente que $C(S, v_S) \subseteq C(S, v_S^{\mathcal{F}})$. $\square$

Para esta proposición pueden hacerse notar las mismas precisiones que las indicadas en la Proposición 2.2.11.

Teorema 2.3.14 *Sea la terna $(N, \mathcal{F}, v)$, en la que $(N, \mathcal{F})$ es un sistema de partición y (N, v) un juego que verifica $v(N) = v^{\mathcal{F}}(N)$. Entonces:*

(a) Si (N, v) es un juego equilibrado, también lo es $(N, v^{\mathcal{F}})$.

(b) Si (N, v) es totalmente equilibrado, $(N, v^{\mathcal{F}})$ lo es.

Demostración: (a) Es inmediato, teniendo en cuenta el resultado de Bondareva y Shapley aludido en el Teorema 2.2.12 y el apartado (a) de la Proposición 2.3.13.

(b) Hay que probar que $\forall S \subset N$, el juego $(S, v_S^{\mathcal{F}})$ es equilibrado. Si $S \in \mathcal{F}$, el par (S, v_S) es un juego equilibrado y, debido al apartado (b) de la Proposición 2.3.13, $(S, v_S^{\mathcal{F}})$ lo es. Si $S \notin \mathcal{F}$, entonces $S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_k$ ($\mathcal{F}$–componentes de S) y, por hipótesis:

$$C(S_t, v_{S_t}) \neq \emptyset, \quad t = 1, \ldots, k.$$

Para probar que $(S, v_S^{\mathcal{F}})$ es equilibrado, basta demostrar que su *core* no es vacío. En efecto, considérese

$$x^{S_1} \in C(S_1, v_{S_1}), \ldots, x^{S_k} \in C(S_k, v_{S_k}).$$

Como cada elemento $i \in S$ pertenece a una única $\mathcal{F}$–componente de S, resulta que si $i \in S_p \subset S$, $S_p \in \Pi_S$, se puede asociar

$$i \longmapsto x_i^{S_p},$$

siendo $x_i^{S_p}$ la componente que corresponde al jugador i en el vector $x^{S_p} \in C(S_p, v_{S_p})$. Con ello, se define $y \in \mathbb{R}^{|S|}$ tal que $y_i = x_i^{S_p}$. El vector así definido pertenece al *core* del subjuego inducido $(S, v_S^{\mathcal{F}})$ ya que, en primer lugar:

$$\begin{aligned} y(S) &= \sum_{i\in S} y_i = \sum_{i\in S} x_i^{S_p} = \sum_{S_p\in\Pi_S}\left[\sum_{i\in S_p} x_i^{S_p}\right] \\ &= \sum_{S_p\in\Pi_S} x^{S_p}(S_p) = \sum_{S_p\in\Pi_S} v(S_p) = v^{\mathcal{F}}(S) = v_S^{\mathcal{F}}(S). \end{aligned}$$

En segundo lugar, si $T \subseteq S$, entonces

$$v_S^{\mathcal{F}}(T) = \sum_k v(T_k).$$

Como $T_k \subseteq S_j$, para un único j, y $x^{S_j} \in C(S_j, v_{S_j})$, se tiene que

$$v(T_k) = v_{S_j}(T_k) \leq x^{S_j}(T_k) = \sum_{i\in T_k} x_i^{S_j},$$

y resulta finalmente

$$v_S^{\mathcal{F}}(T) = \sum_k v(T_k) \leq \sum_k \left[\sum_{i\in T_k} x_i^{S_j}\right] = \sum_{i\in T} x_i^{S_j} = \sum_{i\in T} y_i = y(T).$$

□

Proposición 2.3.15 *Sea la terna $(N, \mathcal{F}, v)$, en la que $(N, \mathcal{F})$ es un sistema de partición y (N, v) un juego. Si el $\mathcal{F}$–restringido verifica que $v(N) = v^{\mathcal{F}}(N)$, entonces:*

$$C(N, v^{\mathcal{F}}) = \{\ x \in \mathbb{R}^n \mid x(N) = v(N),\ x(S) \geq v(S),\ \forall S \in \mathcal{F} \setminus \emptyset\ \}.$$

Demostración: Si $x \in C(N, v^{\mathcal{F}})$, entonces

$$x(N) = v^{\mathcal{F}}(N), \quad x(S) \geq v^{\mathcal{F}}(S)\ , \forall S \subseteq N \setminus \emptyset.$$

De ahí:

$$x(N) = v^{\mathcal{F}}(N) = v(N), \quad x(S) \geq v^{\mathcal{F}}(S) = v(S)\ , \forall S \in \mathcal{F} \setminus \emptyset.$$

Por otra parte, sea $x \in \mathbb{R}^n$, con

$$x(N) = v(N), \quad x(S) \geq v(S), \quad \forall S \in \mathcal{F} \setminus \emptyset.$$

Entonces, $x(N) = v(N) = v^{\mathcal{F}}(N)$ y para toda $S \subset N \setminus \emptyset$:

$$x(S) = \sum_{i \in S} x_i = \sum_k \left[\sum_{i \in S_k} x_i \right] = \sum_k x(S_k) \geq \sum_k v(S_k) = v^{\mathcal{F}}(S),$$

siendo $\{S_k\}$ la partición de S en sus $\mathcal{F}$–componentes. □

Proposición 2.3.16 *Sea la terna $(N, \mathcal{F}, v)$, en la que $(N, \mathcal{F})$ es un sistema de partición y (N, v) un juego. Si se verifica que $v(N) = v^{\mathcal{F}}(N) = \tilde{v}^{\mathcal{F}}(N)$, entonces:*

$$C(N, v^{\mathcal{F}}) = C(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}}).$$

Demostración: Si $(N, \mathcal{F})$ es un sistema de partición es, también, un sistema de coaliciones factibles. Por tanto, tiene sentido considerar los juegos restringidos $(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}})$ y $(N, v^{\mathcal{F}})$. La Proposición 2.2.14 y la Proposición 2.3.15 aseguran el resultado. □

En resultados anteriores se ha mostrado que si (N, v) es superaditivo, entonces el juego restringido por un sistema de partición $(N, v^{\mathcal{F}})$ también lo es. Sin embargo, la *convexidad* no es transmitida, de forma general, al correspondiente juego restringido. Ello, puede observarse en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3.17 Sea (N, G, v) una *situación de comunicación* donde $N = \{1, 2, 3, 4\}$ es el conjunto de los jugadores, la función característica del juego es $v(S) = |S| - 1$, para toda $S \subseteq N$, y $v(\emptyset) = 0$. Nótese que v es una función supermodular. Si G es el grafo representado en la Figura 2.3, y $(N, \mathcal{F})$ es el *sistema de partición* considerado en los ejemplos anteriores de esta sección, entonces es fácil ver que (N, v) es un juego *convexo*, mientras que $(N, v^{\mathcal{F}})$ no lo es ya que, para $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{2, 3, 4\}$ se verifica

$$(v^{\mathcal{F}}(A \cup B) + v^{\mathcal{F}}(A \cap B) = 3 + 0) \not\geq (v^{\mathcal{F}}(A) + v^{\mathcal{F}}(B) = 2 + 2).$$

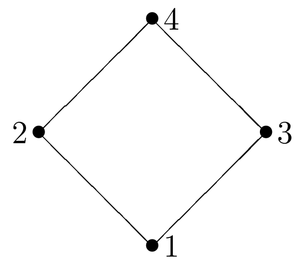


FIGURA 2.3

Esta situación, referente a la convexidad del juego restringido, se contempló en la sección anterior de este capítulo y allí se indicó que se estudiarían las condiciones estructurales que tendrían que cumplirse para que se transmitiera la convexidad. Los conceptos que a continuación se presentan tienen ese objetivo.

Grötschel, Lovász y Schrijver [31, Capítulo 10] introducen el siguiente concepto: una colección $\mathcal{C}$ de subconjuntos de N es una *familia intersectante* si

$$S, T \in \mathcal{C} \;\text{ con }\; S \cap T \neq \emptyset \implies S \cap T \in \mathcal{C},\; S \cup T \in \mathcal{C}.$$

La Proposición 2.3.6 implica que, si una familia intersectante $\mathcal{C}$ es *atómica* ($\{i\} \in \mathcal{C}$, $\forall i \in N$) y $\emptyset \in \mathcal{C}$, entonces $(N, \mathcal{C})$ es un *sistema de partición*.

Por otro lado, Faigle [25] considera una terna $(N, \mathcal{F}, v)$ donde $\mathcal{F}$ es un conjunto de *coaliciones* de N (no le exige que $\emptyset \in \mathcal{F}$ ni que $\{i\} \in \mathcal{F}$, $\forall i \in N$, con lo que $(N, \mathcal{F})$ no es necesariamente un *sistema de coaliciones factibles*) y (N, v) un juego. Denomina $\tilde{\mathcal{F}}$ al conjunto de coaliciones de N que pueden expresarse como uniones disjuntas de elementos de $\mathcal{F}$. Es decir, si $A \in \tilde{\mathcal{F}}$, entonces

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_p \;,\; A_i \in \mathcal{F} \;,\; i = 1, \ldots, p \;\text{ y }\; A_i \cap A_j = \emptyset \;\text{ con }\; i \neq j,$$

y define la función $\tilde{v} : \tilde{\mathcal{F}} \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$\tilde{v}(A) = \max \left\{ \sum_i v(A_i) \right\}$$

donde el máximo se toma cuando se recorren todas las posibles particiones de A en elementos de $\mathcal{F}$. Con estas ideas y condiciones, Faigle [25, Lema 11] demuestra que si $\mathcal{F}$ es una *familia intersectante* y

$$v(A) + v(B) \leq v(A \cup B) + v(A \cap B),$$

para cualquier $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F}$, entonces

$$\tilde{v}(A) + \tilde{v}(B) \leq \tilde{v}(A \cup B) + \tilde{v}(A \cap B),$$

para toda $A \in \tilde{\mathcal{F}}$, $B \in \tilde{\mathcal{F}}$.

Teorema 2.3.18 *Sea la terna $(N, \mathcal{C}, v)$ siendo $\mathcal{C}$ una familia intersectante, atómica, tal que $\emptyset \in \mathcal{C}$ y (N, v) un juego. Sea $(N, v^{\mathcal{C}})$ el juego restringido por el sistema de partición. Si (N, v) es convexo, entonces $(N, v^{\mathcal{C}})$ también lo es.*

Demostración: Utilizando los razonamientos previos, $(N, \mathcal{C})$ es un sistema de partición. Por tanto, si $\mathcal{C}$ es el conjunto de coaliciones factibles, resulta que $\tilde{\mathcal{C}} = 2^N$. Entonces, la función $\tilde{v}$ se define sobre 2^N mediante

$$\tilde{v}(S) = \max \left\{ \sum_i v(S_i) \right\}, \; S \subseteq N.$$

Como (N, v) es convexo, entonces v es superaditiva. Así, es inmediato que:

$$\tilde{v}(S) = \max \left\{ \sum_i v(S_i) \right\} = \tilde{v}^{\mathcal{C}}(S) = v^{\mathcal{C}}(S).$$

Utilizando el resultado de Faigle, [25, Lema 11], $\tilde{v}$ es supermodular y, por tanto, $(N, v^{\mathcal{C}})$ es convexo. □

Este teorema nos indica, que los sistemas de partición que sean $\bigcap$–estables (cerrados para la intersección de dos cualesquiera de sus elementos) transmiten la convexidad de un determinado juego (N, v) al correspondiente juego restringido por un sistema de partición. Igualmente que, en esta clase especial de sistemas de coaliciones factibles, no hace falta ninguna hipótesis adicional a la convexidad para que ésta se transmita al juego con cooperación restringida.

El Teorema 2.3.18 puede extenderse a una terna $(N, \mathcal{C}, v)$ en la que $(N, \mathcal{C})$ es una unión finita disjunta de familias intersectantes, atómicas, que contienen al conjunto vacío y v es un juego en N. Es decir

$$N = N_1 \cup \ldots \cup N_t \ \text{ con } \ N_i \cap N_j = \emptyset \ , \ i \neq j,$$

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{C}_t \ \text{ con } \ \mathcal{C}_i \subseteq 2^{N_i}, \ \emptyset \in \mathcal{C}_i \ , \ i = 1, \ldots, t,$$

y $\mathcal{C}_i$ es una *familia intersectante atómica*. En los siguientes parágrafos, se denotará por $(N, \mathcal{C}) = \bigcup_i (N_i, \mathcal{C}_i)$.

Con estas premisas, $\mathcal{C}$ es una *familia intersectante*, atómica y contiene al conjunto vacío. En efecto, $\emptyset \in \mathcal{C}$ ya que $\emptyset \in \mathcal{C}_i$, $i = 1, \ldots, t$; si $a \in N$ entonces $a \in N_i$, para un único i, lo que implica que $\{a\} \in \mathcal{C}_i \subset \mathcal{C}$ debido a que $\mathcal{C}_i$, $i = 1, \ldots, t$ es una familia intersectante atómica. Por último, si $A, B \in \mathcal{C}$ con $A \cap B \neq \emptyset$ entonces $A, B \in \mathcal{C}_i$, para un único i; de ahí $A \cap B \in \mathcal{C}_i \subset \mathcal{C}$ y $A \cup B \in \mathcal{C}_i \subset \mathcal{C}$.

El razonamiento previo indica que $(N, \mathcal{C})$ es un *sistema de partición* y, por tanto, tiene sentido considerar el correspondiente *$\mathcal{C}$–juego restringido*:

$$v^{\mathcal{C}}(S) = \sum_k \{v(S_k) \mid S_k \in \Pi_S\}, \quad S \subseteq N,$$

siendo Π_S la partición de S en sus *$\mathcal{C}$–componentes*

Pero, (N, v) es un juego y puede considerarse la colección de subjuegos $\{(N_i, v_{N_i})\}_{i=1}^t$, donde $v_{N_i}(A) = v(A)$ con $A \subseteq N_i$. Como $(N_i, \mathcal{C}_i)$ es un sistema de partición, tiene razón de ser la terna $(N_i, \mathcal{C}_i, v_{N_i})$ y el *$\mathcal{C}_i$–juego restringido* asociado. De estas consideraciones y debido a que

$$S = S \cap N = S \cap \left(\bigcup_i N_i \right) = \bigcup_i (S \cap N_i),$$

y a la estructura de $(N, \mathcal{C}) = \bigcup_i (N_i, \mathcal{C}_i)$ resulta ser

$$v^{\mathcal{C}}(S) = \sum_i \left\{ \sum_k v(S_{ki}) \mid S_{ki} \in \Pi_{S \cap N_i} \right\} = \sum_i v_{N_i}^{\mathcal{C}_i}(S \cap N_i).$$

Proposición 2.3.19 *Sea la terna $(N, \mathcal{C}, v)$, donde $(N, \mathcal{C}) = \bigcup_i (N_i, \mathcal{C}_i)$ es una unión finita disjunta de familias intersectantes atómicas que contienen al vacío. Si v es un juego convexo sobre N, entonces, el correspondiente $\mathcal{C}$–juego restringido satisface la misma propiedad.*

Demostración: Si (N, v) es convexo y $N = \bigcup_i N_i$, cada uno de los subjuegos de la colección $\{(N_i, v_{N_i})\}_{i=1}^t$ también lo es. Como $\mathcal{C}_i$, para cualquier i, es una familia intersectante atómica que contiene al conjunto vacío, resulta que el juego restringido que corresponde a cada terna $(N_i, \mathcal{C}_i, v_{N_i})$ es convexo como consecuencia del Teorema 2.3.18. Entonces, si $A, B \subseteq N$ resulta que $A \cap N_i$, $B \cap N_i \subseteq N_i$. Aplicando la supermodularidad de la función $v_{N_i}^{\mathcal{C}_i}$ a las coaliciones $A \cap N_i$ y $B \cap N_i$, se tiene:

$$v_{N_i}^{\mathcal{C}_i}((A \cup B) \cap N_i)) + v_{N_i}^{\mathcal{C}_i}((A \cap B) \cap N_i)) \geq v_{N_i}^{\mathcal{C}_i}(A \cap N_i) + v_{N_i}^{\mathcal{C}_i}(B \cap N_i).$$

Al ser válido el razonamiento para cualquier i, se cumple

$$\sum_i v_{N_i}^{\mathcal{C}_i}((A \cup B) \cap N_i)) + \sum_i v_{N_i}^{\mathcal{C}_i}((A \cap B) \cap N_i)) \geq$$

$$\geq \sum_i v_{N_i}^{\mathcal{C}_i}(A \cap N_i) + \sum_i v_{N_i}^{\mathcal{C}_i}(B \cap N_i).$$

Finalmente, se tiene que

$$v^{\mathcal{C}}(A \cup B) + v^{\mathcal{C}}(A \cap B) \geq v^{\mathcal{C}}(A) + v^{\mathcal{C}}(B).$$

□

2.4 El espacio $L_{\mathcal{F}}(\Gamma^N)$

Si $(N, \mathcal{F})$ es un sistema de partición, para cada juego (N, v) es posible considerar el correspondiente juego con estructura de cooperación asociado a él.

De ahí que pueda definirse una aplicación de Γ^N en sí mismo, que se denotará por $L_{\mathcal{F}}$

$$L_{\mathcal{F}}\ :\ \Gamma^N \longrightarrow \Gamma^N, \quad L_{\mathcal{F}}(v) = v^{\mathcal{F}}.$$

En esta sección, continuación natural de la anterior, se indican algunas características básicas del operador $L_{\mathcal{F}}$ y se estudia el conjunto imagen $L_{\mathcal{F}}(\Gamma^N)$, el cual tendrá una relevancia fundamental en el capítulo posterior cuando se necesite expresar un $\mathcal{F}$–juego restringido como combinación lineal de juegos de unanimidad. En lo que sigue, se admitirá que, en el sistema de partición que se considere, siempre será $\mathcal{F} \neq 2^N$ ya que en el caso de la igualdad cualquier coalición de N es una coalición factible y, como consecuencia, $v^{\mathcal{F}} = v$ con lo que la aplicación $L_{\mathcal{F}}$ es la identidad.

Dado que Γ^N es un espacio vectorial de dimensión $(2^{|N|} - 1)$ y que el $\mathcal{F}$–juego restringido está definido sobre una suma extendida a las $\mathcal{F}$–componentes de cada coalición, es de esperar que $L_{\mathcal{F}}$ sea un endomorfismo en Γ^N. Ello se recoge en la siguiente proposición.

Proposición 2.4.1 *$L_{\mathcal{F}}$ es un operador lineal y no biyectivo si $\mathcal{F} \neq 2^N$.*

Demostración: Es fácil ver que

$$L_{\mathcal{F}}(\alpha v + \beta w) = \alpha L_{\mathcal{F}}(v) + \beta L_{\mathcal{F}}(w), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall v, w \in \Gamma^N,$$

debido a la definición del $\mathcal{F}$–juego restringido. En efecto, para cualquier $S \subseteq N$:

$$\begin{aligned}(\alpha v + \beta w)^{\mathcal{F}}(S) &= \sum_i (\alpha v + \beta w)(S_i) = \alpha \sum_i v(S_i) + \beta \sum_i w(S_i) \\ &= (\alpha v^{\mathcal{F}} + \beta w^{\mathcal{F}})(S).\end{aligned}$$

La aplicación $L_{\mathcal{F}}$ no es biyectiva ya que su núcleo no queda reducido al juego nulo ($\theta(S) = 0,\ \forall S \subseteq N$). Como $\mathcal{F} \subset 2^N$ ($\mathcal{F} \neq 2^N$), existen subconjuntos de N que no son coaliciones factibles. De ahí, el juego definido, $\forall S \subseteq N$, por

$$v(S) = \begin{cases} 0, & \text{si } S \in \mathcal{F} \\ 1, & \text{si } S \notin \mathcal{F}, \end{cases}$$

es no nulo, y su imagen es el juego nulo:

$$\forall S \subseteq N, \quad v^{\mathcal{F}}(S) = \sum_k v(S_k) = \sum_k 0 = 0.$$

□

En el espacio vectorial Γ^N, se sabe que el conjunto de los juegos de unanimidad $\{ u_T \mid T \subseteq N,\ T \neq \emptyset\}$ constituyen una base. Por tanto, cualquier juego $v \in \Gamma^N$ puede expresarse como combinación lineal de ellos, resultando que (véase Shapley [56])

$$v = \sum_{\substack{T\subseteq N \\ T\neq\emptyset}} \Delta_v(T) u_T \quad \text{con} \quad \Delta_v(T) = \sum_{H\subseteq T} (-1)^{|T|-|H|} v(H).$$

Tal como indica Harsanyi [33], a cada una de las coordenadas del juego v en la base formada por los juegos de unanimidad, $\Delta_v(T)$, se la denomina *dividendo de* T *en el juego* v.

De lo anterior y de linealidad del operador $L_{\mathcal{F}}$ se obtiene que

$$v^{\mathcal{F}} = L_{\mathcal{F}}(v) = L_{\mathcal{F}} \left(\sum_{\substack{T\subseteq N \\ T\neq\emptyset}} \Delta_v(T) u_T \right) = \sum_{T\subseteq N} \Delta_v(T) u_T^{\mathcal{F}}.$$

Por tanto, interesa conocer algunas características de las imágenes de los diferentes juegos de unanimidad. Ahora bien, antes de enunciarlas ha de resaltarse que, debido a la existencia de dividendos para cualquier coalición no vacía en un determinado juego, puede considerarse (para un juego v prefijado) la *función dividendo* extendida a todas las coaliciones de N:

$$\Delta_v \ : \ 2^N \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \Delta_v(S) = \sum_{H\subseteq S} (-1)^{|S|-|H|} v(H),$$

con lo que resulta

$$\Delta_v(\emptyset) = \sum_{H\subseteq\emptyset} (-1)^{-|H|} v(H) = v(\emptyset) = 0.$$

Proposición 2.4.2 *Sea $u_T \in \Gamma^N$ un juego de unanimidad. Entonces $L_{\mathcal{F}}(u_T) = u_T^{\mathcal{F}}$ viene definido, para toda $S \subseteq N$, por*

$$u_T^{\mathcal{F}}(S) = \begin{cases} 1, & \textit{si existe } F \in \mathcal{F} \textit{ tal que } T \subseteq F \subseteq S, \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

Además, para toda $S \subseteq N$, $\Delta_{u_T^{\mathcal{F}}}(S) = \sum_{L \subseteq S} \mu(L,S) u_T^{\mathcal{F}}(L)$ siendo μ la función de Möbius de $(2^N, \subseteq)$.

Demostración: En principio, $u_T^{\mathcal{F}} = L_{\mathcal{F}}(u_T)$ y al ser los juegos de unanimidad u_T simples y propios (ya que son superaditivos), aplicando la Proposición 2.3.12, se tiene que los $\mathcal{F}$–juegos restringidos, $u_T^{\mathcal{F}}$, también son simples y propios. Además,

$$u_T^{\mathcal{F}}(S) = \text{máx}\{ \, u_T(S_k) \mid S_k \in \Pi_S \, \}.$$

Luego $u_T^{\mathcal{F}}(S) = 1$ si y sólo si $u_T(S_k) = 1$ para un único k. Ello será cierto únicamente cuando $T \subseteq S_k$, lo cual es equivalente a que exista un $F \in \mathcal{F}$ tal que $T \subseteq F \subseteq S$. Por tanto, se verifica la tesis al ser:

$$\forall S \subseteq N, \quad u_T^{\mathcal{F}}(S) = \begin{cases} 1, & \text{si existe } F \in \mathcal{F} \text{ tal que } T \subseteq F \subseteq S, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sea $\{u_L \mid L \in 2^N, \ L \neq \emptyset\}$ la base de Γ^N formada por los juegos de unanimidad. Dado $u_T \in \Gamma^N$, el juego restringido $u_T^{\mathcal{F}} \in \Gamma^N$ y, por tanto, puede expresarse como combinación lineal de los juegos de unanimidad:

$$u_T^{\mathcal{F}} = \sum_{\substack{L \subseteq N \\ L \neq \emptyset}} \Delta_{u_T^{\mathcal{F}}}(L) u_L = \sum_{L \subseteq N} \Delta_{u_T^{\mathcal{F}}}(L) u_L$$

Así, para cualquier coalición $S \subseteq N$:

$$u_T^{\mathcal{F}}(S) = \sum_{L \subseteq N} \Delta_{u_T^{\mathcal{F}}}(L) u_L(S) = \sum_{L \subseteq S} \Delta_{u_T^{\mathcal{F}}}(L)$$

ya que $u_L(S) = 1$ si y sólo si $L \subseteq S$.

Si se considera el conjunto parcialmente ordenado $P = (2^N, \subseteq)$ y las funciones:

$$u_T^{\mathcal{F}} \ , \ \Delta_{u_T^{\mathcal{F}}} \ : \ 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$$

resulta que, aplicando la fórmula de inversión de Möbius [62, p. 116]:

$$u_T^{\mathcal{F}}(S) = \sum_{L \subseteq S} \Delta_{u_T^{\mathcal{F}}}(L) \iff \Delta_{u_T^{\mathcal{F}}}(S) = \sum_{L \subseteq S} \mu(L,S) u_T^{\mathcal{F}}(L).$$

□

Teorema 2.4.3 *Si $(N, \mathcal{F})$ es un sistema de partición, entonces el conjunto de los juegos de unanimidad $\{ \ u_T \mid T \in \mathcal{F} \ , \ T \neq \emptyset \ \}$ constituye una base del espacio $L_{\mathcal{F}}(\Gamma^N)$.*

Demostración: Se ha probado que

$$v^{\mathcal{F}} = \sum_{\substack{T \subseteq N \\ T \neq \emptyset}} \Delta_v(T) u_T^{\mathcal{F}} \quad \text{y} \quad u_T^{\mathcal{F}} = \sum_{\substack{S \subseteq N \\ S \neq \emptyset}} \Delta_{u_T^{\mathcal{F}}}(S) u_S,$$

con lo que

$$v^{\mathcal{F}} = \sum_{\substack{T \subseteq N \\ T \neq \emptyset}} \Delta_v(T) \left[\sum_{\substack{S \subseteq N \\ S \neq \emptyset}} \Delta_{u_T^{\mathcal{F}}}(S) u_S \right] = \sum_{\substack{S \subseteq N \\ S \neq \emptyset}} \left[\sum_{\substack{T \subseteq N \\ T \neq \emptyset}} \Delta_v(T) \Delta_{u_T^{\mathcal{F}}}(S) \right] u_S.$$

Por tanto, es suficiente probar que si $S \notin \mathcal{F}$, entonces $\Delta_{u_T^{\mathcal{F}}}(S) = 0$, para todo $T \neq \emptyset$. Por otro lado, teniendo en cuenta la expresión de los dividendos $\Delta_{u_T^{\mathcal{F}}}(S)$ calculada en la Proposición 2.4.2, es lógico que, a fin de determinarlos, se busque el valor de $u_T^{\mathcal{F}}(L)$ para cualquier $L \subseteq S$.

Si no existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $T \subseteq F \subset S$ resulta que, por definición, $u_T^{\mathcal{F}}(S) = 0$ y, por consiguiente, $u_T^{\mathcal{F}}(L) = 0$, para todo $L \subseteq S$, ya que es un juego monótono. De ahí, utilizando la Proposición 2.4.2, se obtiene que $\Delta_{u_T^{\mathcal{F}}}(S) = 0$.

Supóngase que existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $T \subseteq F \subset S$. Como $F \in \mathcal{F}$, éste será o estará contenido en una única $\mathcal{F}$–componente de S. Por simplicidad, se seguirá denominando por F a dicha componente. Es decir, se supone que existe $F \in \Pi_S$ con $T \subseteq F \subset S$ y sea L un subconjunto cualquiera de S.

Al ser $L \subseteq S$, puede descomponerse en $L = L_1 \cup L_2$ con $L_1 = L \cap F$ y $L_2 = L \cap (S \setminus F)$ de forma que la aplicación:

$$L \subseteq S \longmapsto (L_1, L_2), \quad \text{con } L_1 \subseteq F, \quad \text{y } L_2 \subseteq (S \setminus F)$$

es un isomorfismo entre el álgebra de Boole de las partes de S, $(2^S, \subseteq)$, y el conjunto parcialmente ordenado $(2^F \times 2^{S \setminus F}, \subseteq)$. Además, debido a la definición de $u_T^{\mathcal{F}}(L)$ y a que F es la única coalición factible maximal que contiene a T, resulta que $u_T^{\mathcal{F}}(L) = u_T^{\mathcal{F}}(L_1)$.

Aplicando la fórmula de los dividendos (Proposición 2.4.2), las propiedades de las funciones de Möbius así como el Teorema del Producto [62, p. 118] en el conjunto parcialmente ordenado $(2^F \times 2^{S \setminus F}, \subseteq)$:

$$\begin{aligned}
\Delta_{u_T^{\mathcal{F}}}(S) &= \sum_{L \in 2^S} \mu_{2^S}(L, S) u_T^{\mathcal{F}}(L) \\
&= \sum_{L \in 2^S} \mu_{2^F \times 2^{S \setminus F}}((L_1, L_2), (F, S \setminus F)) u_T^{\mathcal{F}}(L_1) \\
&= \sum_{L_1 \in 2^F} \sum_{L_2 \in 2^{S \setminus F}} \mu_{2^F}(L_1, F) \mu_{2^{S \setminus F}}(L_2, S \setminus F) u_T^{\mathcal{F}}(L_1) \\
&= \sum_{L_1 \in 2^F} \mu_{2^F}(L_1, F) u_T^{\mathcal{F}}(L_1) \left[\sum_{L_2 \in 2^{S \setminus F}} \mu_{2^{S \setminus F}}(L_2, S \setminus F) \right].
\end{aligned}$$

Por último, $\mathcal{L} = 2^{S \setminus F}$ es un retículo finito que posee, al menos, dos elementos distintos (el conjunto vacío y $S \setminus F$, con $S \setminus F \neq \emptyset$ por ser $S \notin \mathcal{F}$) y la función de Möbius satisface (véase la página 22)

$$\sum_{x \in \mathcal{L}} \mu \left(x, \hat{1} \right) = 0,$$

por lo que se deduce que $\Delta_{u_T^{\mathcal{F}}}(S) = 0$. $\square$

Corolario 2.4.4 *Sea $(N, \mathcal{F})$ un sistema de partición y sea $v \in \Gamma^N$. Entonces, el $\mathcal{F}$–juego restringido puede expresarse como*

$$v^{\mathcal{F}} = \sum_{T \in \mathcal{F}} \Delta_{v^{\mathcal{F}}}(T) u_T, \quad \textit{con} \quad \Delta_{v^{\mathcal{F}}}(\emptyset) = 0.$$

El Teorema 2.4.3 generaliza los resultados obtenidos por Owen [52, Teoremas 2 y 3] cuando considera sistemas de partición derivados de *situaciones de comunicación* (véase Ejemplo 2.3.3) y los correspondientes *juegos restringidos por grafos*.

Capítulo 3

Juegos Restringidos por Geometrías Convexas

En las siguientes secciones de este capítulo se generalizan algunos resultados de Myerson y Owen así como de Hart y Mas–Colell [37]. En particular, se definirá el *valor convexo de Shapley* y de *Banzhaf–Coleman*, se introducirá un método recursivo para evaluar ambos *valores convexos* mediante la función potencial de Hart y Mas–Colell, y también se empleará la extensión multilineal de Owen. Finalmente, en la última sección, se aplicarán las técnicas introducidas a los juegos simples. Para todo ello, se presenta, en la primera sección, el modelo general que establecen Edelman y Jamison en *The theory of convex geometries* [22] y se estudiarán los juegos restringidos por geometrías convexas de partición.

3.1 Geometrías convexas de partición

Edelman y Jamison, en [22], proponen los siguientes conceptos.

Sea $\mathcal{L}$ una familia de subconjuntos de un conjunto finito N, que cumple las siguientes propiedades:

(i) $\emptyset \in \mathcal{L}$ y $N \in \mathcal{L}$.

(ii) Si $A \in \mathcal{L}$ y $B \in \mathcal{L}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{L}$

Los elementos de $\mathcal{L}$ se denominan *conjuntos convexos* y el par $(N, \mathcal{L})$ *espacio clausura* [69].

Teniendo en cuenta que la intersección es cerrada para los elementos de $\mathcal{L}$ y que cualquier subconjunto de N está incluido, al menos, en un conjunto convexo, tiene sentido definir el *operador clausura*:

$$\mathcal{L} : 2^N \longrightarrow 2^N, \quad A \longmapsto \mathcal{L}(A) = \bigcap \{C \mid A \subseteq C,\ C \in \mathcal{L}\} \in \mathcal{L},$$

que tiene las siguientes características,

(i) $A \subseteq \mathcal{L}(A)$, para todo $A \subseteq N$.

(ii) Si $A \subseteq B$, entonces $\mathcal{L}(A) \subseteq \mathcal{L}(B)$.

(iii) $\mathcal{L}(\mathcal{L}(A)) = \mathcal{L}(A)$, para todo $A \in 2^N$.

(iv) $A \in \mathcal{L}$ si y sólo si $A = \mathcal{L}(A)$.

Obviamente $\mathcal{L}(\emptyset) = \emptyset$. Si $S \subseteq N$, $\mathcal{L}(S)$ se denominará *envoltura convexa* o *clausura* de S.

Una *base* para $S \in 2^N$, es un subconjunto minimal $B \subseteq S$ tal que verifica $\mathcal{L}(B) = \mathcal{L}(S)$. Un punto i de un conjunto $S \subseteq N$ es un *punto extremal* de S si $i \notin \mathcal{L}(S \setminus \{i\})$. El conjunto de los puntos extremales de S se denota por $ex(S)$, el cual puede ser vacío.

A continuación, se exponen algunas propiedades conocidas de una geometría convexa.

Proposición 3.1.1 *Sea $(N, \mathcal{L})$ un espacio clausura.*

(a) Si $A \in \mathcal{L}$, entonces p es extremo de A si y sólo si $A \setminus \{p\} \in \mathcal{L}$.

(b) Si $S \subseteq A$ es una base de A, entonces $ex(A) \subseteq S$.

Demostración: (a) ($\Longrightarrow$) Sea $A \in \mathcal{L}$ y $p \in ex(A)$. Teniendo en cuenta la definición y propiedades del operador clausura:

$$A \setminus \{p\} \subseteq \mathcal{L}(A \setminus \{p\}) \subseteq \mathcal{L}(A) = A.$$

Como $p \in ex(A)$, se tiene que $p \notin \mathcal{L}(A \setminus \{p\})$. Luego si $\mathcal{L}(A \setminus \{p\}) \subseteq A$, resulta que $\mathcal{L}(A \setminus \{p\}) \subseteq A \setminus \{p\}$. Finalmente, aplicando las propiedades (i) y (iv), se tiene que $A \setminus \{p\} \in \mathcal{L}$.
($\Longleftarrow$) Sea $A \in \mathcal{L}$. Si $A \setminus \{p\} \in \mathcal{L}$ entonces, por (iv), $\mathcal{L}(A \setminus \{p\}) = A \setminus \{p\}$. Como $p \notin A \setminus \{p\}$, ello implica que $p \notin \mathcal{L}(A \setminus \{p\})$ y, por tanto, $p \in ex(A)$.

(b) Sea $S \subseteq A$ una base de A, y sea $p \in ex(A)$. Se ha de probar que $p \in S$. Si $p \notin S$, entonces $S \setminus \{p\} = S$ y $\mathcal{L}(S \setminus \{p\}) = \mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(A)$. Por otro lado, $S \subseteq A$ implica que $S \setminus \{p\} \subseteq A \setminus \{p\}$ y que $\mathcal{L}(S \setminus \{p\}) \subseteq \mathcal{L}(A \setminus \{p\})$. Por tanto

$$\left.\begin{array}{c} \mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(S \setminus \{p\}) \subseteq \mathcal{L}(A \setminus \{p\}) \\ \mathcal{L}(A \setminus \{p\}) \subseteq \mathcal{L}(A) \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(A \setminus \{p\}).$$

Al ser $p \in A$ se deduce que $p \in \mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(A \setminus \{p\})$, con lo que $p \notin ex(A)$ en contra de la hipótesis. $\square$

La anterior proposición pone de manifiesto que cualquier base de $A \in 2^N$ contiene a los puntos extremales de A. Es evidente que ello no implica que el conjunto de los puntos extremales de A constituya una base suya. Si esto ocurriese para cualquier conjunto convexo, es decir

$$\forall S \in \mathcal{L}, \quad \mathcal{L}(ex(S)) = S,$$

se dice que el espacio clausura $(N, \mathcal{L})$ satisface la propiedad de *Minkowski–Krein–Milman.* En este caso, se tiene la siguiente definición

El par $(N, \mathcal{L})$ es una *geometría convexa* si es un *espacio clausura* que verifica la propiedad de *Minkowski–Krein–Milman.*

Así, una *geometría convexa* es un par $(N, \mathcal{L})$ tal que $\mathcal{L}$ es una familia de subconjuntos de N, cerrada para la intersección, que contiene a N y al conjunto vacío, y verifica la propiedad de Minkowski–Krein–Milman. Es decir, un espacio clausura en el que cualquier convexo es la envoltura convexa o clausura de sus puntos extremales. La propiedad de Minkowski–Krein–Milman es equivalente a la denominada *propiedad anticambio* [22, Teorema 2.1] (véase Figura 3.1): $\forall S \in \mathcal{L}$ y $p, q \in N \setminus S$, $p \neq q$, se tiene que

$$q \in \mathcal{L}(S \cup \{p\}) \Longrightarrow p \notin \mathcal{L}(S \cup \{q\}).$$

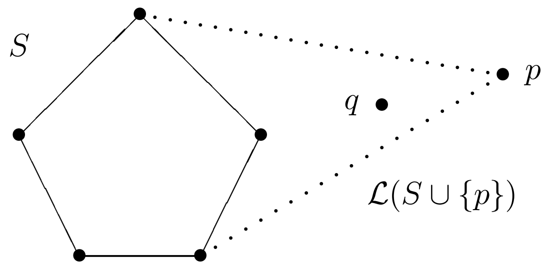


FIGURA 3.1

Evidentemente, si $(N, \mathcal{L})$ es una *geometría convexa* y $S \in \mathcal{L}$, $S \neq \emptyset$, el conjunto de sus puntos extremos es no vacío ya que de serlo resultaría una contradicción: $ex(S) = \emptyset \Longrightarrow S = \mathcal{L}(ex(S)) = \mathcal{L}(\emptyset) = \emptyset$.

Además, si $(N, \mathcal{L})$ es una *geometría convexa*, entonces el conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{L}, \subseteq)$ es un *retículo*. En efecto, como $(N, \mathcal{L})$ es una geometría convexa, entonces se tiene que, para todo $A, B \in \mathcal{L}$, $A \cap B \in \mathcal{L}$ y, por tanto, $\inf\{A, B\} = A \wedge B = A \cap B$. Por otro lado, ya que la unión de conjuntos convexos no es necesariamente un conjunto convexo, entonces $\mathcal{L}(A \cup B)$ es, por definición, el menor conjunto convexo que la contiene. Así, $\sup\{A, B\} = A \vee B = \mathcal{L}(A \cup B)$. (El razonamiento seguido permite afirmar que si $(N, \mathcal{L})$ es un espacio de clausura, el conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{L}, \subseteq)$ es también un retículo.)

Considérese el retículo $(\mathcal{L}, \subseteq)$ y $S \in \mathcal{L}$. Debido al apartado (a) de la Proposición 3.1.1, S *cubre* a $S \setminus \{i\}$, $\forall i \in ex(S)$. En efecto, si para algún $i \in ex(S)$ se verificara que S no cubre a $S \setminus \{i\}$, entonces existe un conjunto $C \in \mathcal{L}$ tal que $S \setminus \{i\} \subset C \subset S$. Por tanto, todo $j \in ex(S)$, $j \neq i$, pertenece a C por ser de $S \setminus \{i\}$. Además, $i \in C$ pues de lo contrario $C \subset S \setminus \{i\}$. Luego $ex(S) \subseteq C$ y se llega a una contradicción, ya que $\mathcal{L}(ex(S)) \subseteq \mathcal{L}(C)$ si y sólo si $S \subseteq C$. Esto prueba que S *cubre* a $S \setminus \{i\}$, $i \in ex(S)$, y sólo a estos convexos. En lo que sigue, se utilizará el símbolo $\succ$ para la relación de *cubrir* en el retículo $(\mathcal{L}, \subseteq)$.

El razonamiento anterior, permite establecer el siguiente resultado.

Proposición 3.1.2 *Si $(N, \mathcal{L})$ es una geometría convexa y $S \in \mathcal{L}$, entonces el intervalo $[S^-, S]$, en el retículo $(\mathcal{L}, \subseteq)$, es un álgebra de Boole, donde*

$$S^- = \bigwedge \{C \in \mathcal{L} \mid C \prec S\} = S \setminus ex(S).$$

Demostración: Es una consecuencia directa de un teorema de Edelman y Jamison [22, Teorema 4.2] en el que se establece que el intervalo $[C, K]$ es un álgebra de Boole en $(\mathcal{L}, \subseteq)$ si y sólo si $K \setminus C \subseteq ex(K)$. Aquí, es inmediato por ser

$$S^- = \bigcap \{S \setminus \{i\} \mid i \in ex(S)\} = S \setminus ex(S),$$

con lo que $S \setminus S^- = ex(S)$. (Véase ejemplo Figura 3.2) $\square$

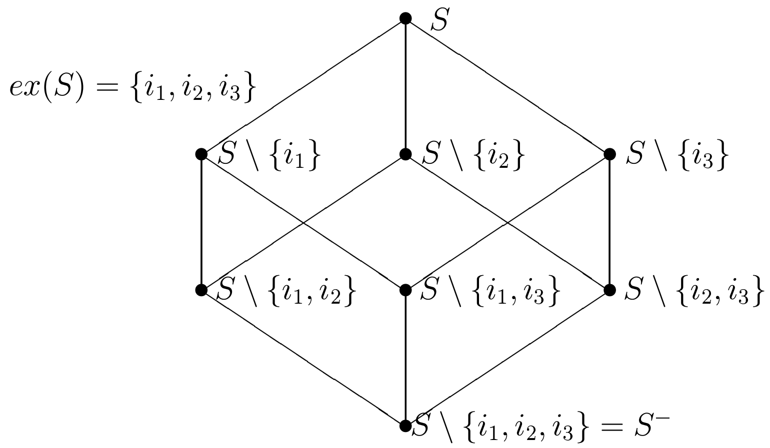


FIGURA 3.2

Si, para cualquier $a \in N$, se tiene que $\{a\} \in \mathcal{L}$, se dice que $(N, \mathcal{L})$ es una *geometría convexa atómica.*

Las anteriores ideas básicas dadas por Edelman y Jamison se completan con otros conceptos y propiedades con el propósito de definir adecuadamente los juegos restringidos, ya que cualquier *geometría convexa atómica* $(N, \mathcal{L})$ constituye un *sistema de coaliciones factibles* pero no es, en general, un *sistema de partición.* En efecto, debido a que una *geometría convexa atómica* es un *sistema de coaliciones factibles* tiene sentido considerar las $\mathcal{L}$*–componentes* (Definición 2.2.15) de cualquier coalición $S \subseteq N$, las cuales verifican que su unión es la coalición S (Proposición 2.2.16) aunque estos convexos maximales de la coalición $S \subseteq N$ no tienen que ser necesariamente disjuntos. Ello se pone de manifiesto en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1.3 Sea $(N, \mathcal{L})$, con $N = \{1, 2, 3, 4\}$ y

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \;=\; & \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{1,4\}, \{2,4\}, \\ & \{1,2,4\}, \{2,3,4\}, N\} \end{aligned}$$

El par $(N, \mathcal{L})$ es una geometría convexa atómica. Sin embargo, para $S = \{1, 2, 3\}$, sus convexos maximales son $\{1, 2\}$ y $\{2, 3\}$, los cuales no son disjuntos.

Teniendo en cuenta la conclusión que se obtiene del ejemplo anterior y que la Proposición 2.3.6 caracteriza a un sistema de partición, se introduce el siguiente concepto

Definición 3.1.4 *Sea $(N, \mathcal{L})$ una geometría convexa atómica. Se dice que es una geometría convexa de partición si para toda $S, T \in \mathcal{L}$, con $S \cap T \neq \emptyset$, se tiene que $S \cup T \in \mathcal{L}$.*

Ejemplo 3.1.5 Un grafo $G = (N, E(N))$ es un *grafo bloque* (en [50] es denominado *ciclo–completo*) si cualquier bloque es un grafo completo (véase [32, p. 30]). En particular, si G es una unión disjunta de *árboles*, entonces G es un *grafo bloque.*

Considérese la *situación de comunicación* (N, G, v) estudiada en el Ejemplo 2.3.4. En él se indicó que el par $(N, \mathcal{F})$, donde

$$\mathcal{F} = \{S \subseteq N \mid (S, E(S)) \text{ es un subgrafo conexo de } G\},$$

es un *sistema de partición*. Edelman y Jamison establecen, [22, Teorema 3.7], que $G = (N, E)$ es un *grafo bloque conexo* si y sólo si $(N, \mathcal{F})$ es una *geometría convexa*. De ahí resulta que si $G = (N, E)$ es un *grafo bloque conexo*, entonces $(N, \mathcal{F})$ es una *geometría convexa de partición*.

Ejemplo 3.1.6 El par $(N, \mathcal{L}_n)$, que corresponde a una situación de votación en un orden político unidimensional, considerado en el Ejemplo 2.3.3 es una *geometría convexa de partición*.

En la Proposición 3.1.2 se ha establecido que, para toda $S \subseteq N$, el intervalo $[S^-, S]$ es isomorfo a $2^{ex(S)}$ siempre que $(N, \mathcal{L})$ sea una geometría convexa. Si $(N, \mathcal{L})$ es una geometría convexa de partición puede establecerse el siguiente resultado:

Proposición 3.1.7 *Sea $(N, \mathcal{L})$ una geometría convexa de partición. Sea $T \in \mathcal{L}$, $T \neq N$, y*

$$T^+ = \bigvee \{C \in \mathcal{L} \mid T \prec C\},$$

entonces se verifica que

(a) Si $T \in \mathcal{L}$ y $T \neq \emptyset$, el intervalo $[T, T^+]$ es un álgebra de Boole isomorfa a $2^{T^+ \setminus T}$.

(b) Si $T = \emptyset$, entonces $[T, T^+] = \mathcal{L}$.

Demostración: (a) Si C *cubre* a T, puede probarse que $C = T \cup \{j\}$, para algún elemento $j \in N \setminus T$. En efecto: si $T \prec C$, entonces $T \subset C$ con lo que $C = T \cup (C \setminus T)$. Supóngase que en $C \setminus T$ hay, al menos, dos elementos distintos i, j. Entonces, por definición de clausura y debido a que $T \prec C$, se tiene que $i \neq j$, $i \in \mathcal{L}(T \cup \{j\}) = C$ y $j \in \mathcal{L}(T \cup \{i\}) = C$, lo cual es contradictorio con la *propiedad anticambio* que verifica cualquier geometría convexa.

Como $T \neq \emptyset$ resulta que dos conjuntos C y D cualesquiera que *cubran* a T tienen intersección no vacía ($C \cap D = T$). Ello implica que, debido a que $(N, \mathcal{L})$ es una geometría convexa de partición, $C \cup D \in \mathcal{L}$. Por tanto:

$$\begin{aligned} T^+ &= \bigvee\{C \in \mathcal{L} \mid T \prec C\} = \mathcal{L}\left(\bigcup\{C \in \mathcal{L} \mid T \prec C\}\right) \\ &= \bigcup\{C \in \mathcal{L} \mid T \prec C\} = T \cup \{j \in N \setminus T \mid T \cup \{j\} \in \mathcal{L}\}. \end{aligned}$$

Al ser el intervalo $[T, T^+]$ isomorfo a la colección de subconjuntos de

$$T^+ \setminus T = \{j \in N \setminus T \mid T \cup \{j\} \in \mathcal{L}\},$$

se obtiene el resultado.

(b) $(N, \mathcal{L})$ es una geometría convexa de partición y, por tanto, es atómica. De ahí, $\{i\} \in \mathcal{L}$ para todo $i \in N$. Luego, si $T = \emptyset$, entonces

$$T^+ = \bigvee_{i \in N} \{i\} = \mathcal{L}\left(\bigcup_{i \in N} \{i\}\right) = \mathcal{L}(N) = N.$$

□

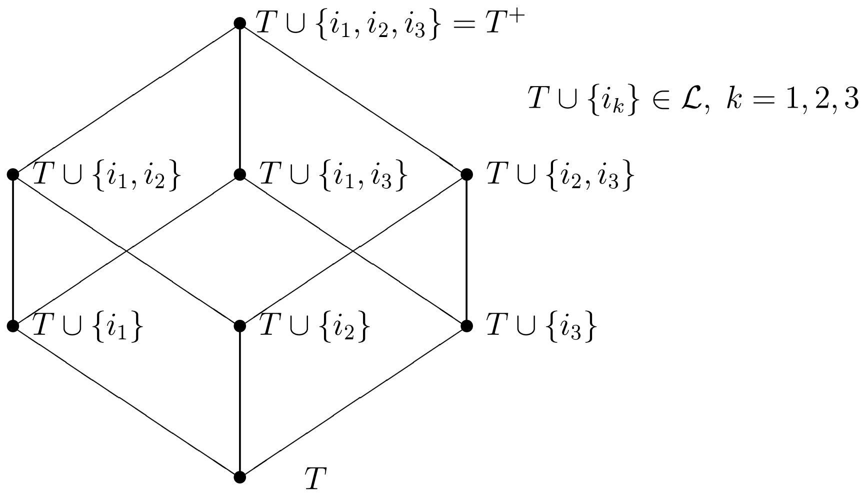


FIGURA 3.3

3.2 Juegos Restringidos por Geometrías

Una *geometría convexa de partición* $(N, \mathcal{L})$ es un *sistema de partición.* A los convexos maximales ($\mathcal{L}$–componentes) de cualquier subconjunto $A \subset N$ se les denominará *componentes convexas* de A.

Lo anterior indica que si se considera la terna $(N, \mathcal{L}, v)$, donde v es un juego sobre N y $(N, \mathcal{L})$ es una geometría convexa de partición, tiene sentido considerar el correspondiente *$\mathcal{L}$–juego restringido* $v^{\mathcal{L}} : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$v^{\mathcal{L}}(S) = \sum_k \{v(T_k) \mid \{T_k\} \text{ partición en componentes convexas de } S\}.$$

Para el *$\mathcal{L}$–juego restringido*, son de aplicación inmediata las conclusiones establecidas en el Teorema 2.3.11 y la Proposición 2.3.12 por las que se transmite el carácter superaditivo del juego (N, v) al juego restringido $(N, v^{\mathcal{F}})$ así como el ser simultáneamente un juego simple y propio. Además, ya que $N \in \mathcal{L}$, siempre se verifica que $v^{\mathcal{L}}(N) = v(N)$ con lo que las Proposiciones 2.3.13 y 2.3.15 aseguran que el *core* del $\mathcal{F}$–juego restringido es no vacío cuando lo sea el del juego (N, v) y que

$$C(N, v^{\mathcal{L}}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \; x(N) = v(N),\, x(S) \geq v(S),\, \forall S \in \mathcal{L} \setminus \emptyset \;\}.$$

Por último, es de resaltar que, debido a que toda geometría convexa de partición es una familia intersectante atómica y que contiene al conjunto vacío (véase página 48), el Ejemplo 3.1.5, el Teorema 2.3.18 y la Proposición 2.3.19 generalizan el resultado de Nouweland y Borm [48] sobre transmisión de la supermodularidad de v a $v^{\mathcal{L}}$ cuando consideran *situaciones de comunicación* (N, G, v) en las que G es un *grafo bloque.*

Como en una geometría convexa de partición puede definirse —para cada juego v sobre N— el juego restringido $v^{\mathcal{L}}$, ello significa que puede establecerse la aplicación del espacio vectorial Γ^N en sí mismo:

$$L_{\mathcal{L}} : \Gamma^N \longrightarrow \Gamma^N \;,\; L_{\mathcal{L}}(v) = v^{\mathcal{L}}.$$

Esta aplicación $L_{\mathcal{L}}$ —estudiada en la sección 2.4— es lineal, no es biyectiva si $\mathcal{L} \neq 2^N$ y, aplicando el Teorema 2.4.3, el conjunto de juegos de unanimidad $\{u_S \mid S \in \mathcal{L},\ S \neq \emptyset\ \}$ constituye una base del espacio imagen $L_{\mathcal{L}}(\Gamma^N)$. No obstante, este resultado puede demostrarse aquí de forma inmediata debido a lo siguiente

Proposición 3.2.1 *Para toda $T \subseteq N$, $T \neq \emptyset$, se tiene que*

$$L_{\mathcal{L}}(u_T) = u_{\mathcal{L}(T)}.$$

Demostración: Por la Proposición 2.4.2

$$\forall S \subseteq N, \quad u_T^{\mathcal{L}}(S) = \begin{cases} 1, & \text{si } \exists C \in \mathcal{L} \ / \ T \subseteq C \subseteq S \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y, aplicando el concepto de envoltura convexa, se obtiene

$$u_T^{\mathcal{L}}(S) = 1 \Leftrightarrow \exists C \in \mathcal{L} \text{ con } T \subseteq C \subseteq S \Leftrightarrow T \subseteq \mathcal{L}(T) \subseteq S \Leftrightarrow u_{\mathcal{L}(T)}(S) = 1$$

con lo que $L_{\mathcal{L}}(u_T) = u_T^{\mathcal{L}} = u_{\mathcal{L}(T)}$, $\forall T \subseteq N$, $T \neq \emptyset$. □

Evidentemente, si $T \in \mathcal{L}$, entonces $\mathcal{L}(T) = T$ y $L_{\mathcal{L}}(u_T) = u_T$. Esta última afirmación junto con el hecho de que $\forall T \subseteq N$, $\mathcal{L}(T) \in \mathcal{L}$ permite indicar que

$$L_{\mathcal{L}}(\{u_T \mid T \subseteq N,\ T \neq \emptyset\}) = \{u_S \mid S \in \mathcal{L},\ S \neq \emptyset\}.$$

Se concluye que cualquier juego restringido $v^{\mathcal{L}}$ puede ponerse como combinación lineal de los juegos de unanimidad u_S, donde $S \in \mathcal{L}$. Es decir,

$$v^{\mathcal{L}} = \sum_{S \in \mathcal{L} \setminus \emptyset} \Delta_{v^{\mathcal{L}}}(S) u_S,$$

siendo $\Delta_{v^{\mathcal{L}}}(S)$ los dividendos del juego restringido por la geometría convexa de partición $v^{\mathcal{L}}$. También, de manera inmediata, los dividendos $\Delta_{v^{\mathcal{L}}}(S) = 0$ si la coalición $S \notin \mathcal{L}$.

Lloyd S. Shapley, en [56], propone el concepto de valor de un juego cooperativo v, dado —para cada jugador $i \in N$— por la siguiente expresión combinatoria

$$\Phi_i(v) = \sum_{i \in S \subseteq N} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}[v(S) - v(S \setminus \{i\})],$$

donde $n = |N|$ y $s = |S|$. Esta fórmula expresa el llamado *valor de Shapley* para un jugador $i \in N$. Es, entre otros, un concepto de solución de un juego cooperativo y puede interpretarse (véase [66]) como la contribución marginal *esperada* del jugador i, o como un promedio de la contribución marginal $v(S) - v(S \setminus \{i\})$ de dicho jugador a todas las coaliciones $S \in 2^N \setminus \emptyset$ cuando se supone que la coalición a la que pertenece el jugador i es igualmente probable que sea de igual tamaño s $(1 \leq s \leq n)$ y que todas las coaliciones de tamaño s son equiprobables. Es decir, una suma ponderada de las contribuciones marginales del jugador i admitiendo que la probabilidad de que el jugador i pertenezca a una coalición de tamaño s, p_s^i, viene dada por

$$p_s^i \begin{pmatrix} n-1 \\ s-1 \end{pmatrix} = \frac{1}{n} \Longrightarrow p_s^i = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} n-1 \\ s-1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}.$$

Si se parte de la apreciación subjetiva de que para el jugador i es equiprobable pertenecer a cualquier coalición, surge el valor de Banzhaf–Coleman [5] [19],

$$\Psi_i(v) = \sum_{i \in S \subseteq N} \frac{1}{2^{n-1}}[v(S) - v(S \setminus \{i\})].$$

Dubey y Shapley [21], indican que la definición correspondiente al índice de Banzhaf–Coleman garantiza las propiedades de linealidad, simetría y *dummy* que se utilizan tradicionalmemte para axiomatizar el valor de Shapley. Sin embargo, el axioma de eficiencia no se cumple porque, en general, ocurre que

$$\sum_{i \in N} \Psi_i(N, v) \neq v(N).$$

Estos conceptos pueden generalizarse con la siguiente definición.

Definición 3.2.2 *Sea la terna $(N, \mathcal{F}, v)$, donde $(N, \mathcal{F})$ es un sistema de partición y v un juego sobre el conjunto N. Se define el $\mathcal{F}$–valor de Shapley del juego (N, v) por*

$$\Phi_i^{\mathcal{F}}(N, v) = \Phi_i(N, v^{\mathcal{F}}), \quad \forall i \in N.$$

De igual manera, el $\mathcal{F}$–valor de Banzhaf–Coleman del juego (N, v) se define como

$$\Psi_i^{\mathcal{F}}(N, v) = \Psi_i(N, v^{\mathcal{F}}), \quad \forall i \in N.$$

Obsérvese que para el sistema de partición considerado en el Ejemplo 2.3.4 —el cual hacía referencia a las denominadas *situaciones de comunicación*—, el *$\mathcal{F}$–valor de Shapley* es el *valor de Myerson* [44],

$$\Phi_i^{\mathcal{L}}(N, v) = \Phi_i(N, v^{\mathcal{L}}) = \Phi_i(N, v^G) = \mu_i(N, G, v).$$

De igual forma, si se considera la terna $(N, \mathcal{F}, v)$ con $\mathcal{F} = 2^N$, resulta que $v^{\mathcal{F}} = v$ y los $\mathcal{F}$–valores definidos coinciden, respectivamente, con el valor de Shapley y el de Banzhaf–Coleman para el juego (N, v).

En el caso de considerar la terna $(N, \mathcal{L}, v)$, donde $(N, \mathcal{L})$ es una geometría convexa de partición, los $\mathcal{F}$–valores definidos se denominarán *valor convexo de Shapley* y *valor convexo de Banzhaf–Coleman*, respectivamente.

Las características de linealidad de los índices de poder de Shapley y de Banzhaf–Coleman hacen que estos $\mathcal{F}$–valores puedan expresarse en términos de los dividendos del juego $v^{\mathcal{F}}$ [52, p. 212]. Para cualquier $i \in N$,

$$\Phi_i^{\mathcal{F}}(N, v) = \sum_{\{S \subseteq N \mid i \in S, S \neq \emptyset\}} \frac{\Delta_{v^{\mathcal{F}}}(S)}{|S|} = \sum_{\{S \in \mathcal{F} \setminus \emptyset \mid i \in S\}} \frac{\Delta_{v^{\mathcal{F}}}(S)}{|S|},$$

$$\Psi_i^{\mathcal{F}}(N, v) = \sum_{\{S \subseteq N \mid i \in S, S \neq \emptyset\}} 2^{1-|S|} \Delta_{v^{\mathcal{F}}}(S) = \sum_{\{S \in \mathcal{F} \setminus \emptyset \mid i \in S\}} 2^{1-|S|} \Delta_{v^{\mathcal{F}}}(S),$$

debido a que $\Delta_{v^{\mathcal{F}}}(S) = 0$ si $S \notin \mathcal{F}$.

Estas expresiones indican que los dividendos del juego restringido $v^{\mathcal{F}}$ son determinantes para el conocimiento de los $\mathcal{F}$–valores de Shapley y de Banzhaf–Coleman. De ahí que se intente buscar fórmulas para su cálculo efectivo, pudiéndose establecer un resultado para el cálculo de los dividendos del juego restringido en función de los dividendos del juego (N, v) y de los transformados de los juegos de unanimidad.

Teorema 3.2.3 *Sea la terna $(N, \mathcal{F}, v)$, donde $(N, \mathcal{F})$ es un sistema de partición y (N, v) un juego. Para cualquier $S \in \mathcal{F}$, los dividendos correspondientes al $\mathcal{F}$–juego restringido vienen determinados por*

$$\Delta_{v^{\mathcal{F}}}(S) = \sum_{T \subseteq S} \Delta_v(T) \Delta_{u_T^{\mathcal{F}}}(S).$$

Demostración: Por un lado, teniendo en cuenta la linealidad de $L_{\mathcal{F}}$ y las bases de juegos de unanimidad existentes en los espacios Γ^N y $L_{\mathcal{F}}(\Gamma^N)$, resulta que las coordenadas o dividendos $\Delta_{v^{\mathcal{F}}}(S)$ del juego restringido $v^{\mathcal{F}}$ vienen determinados por

$$\begin{aligned} v^{\mathcal{F}} &= L_{\mathcal{F}}(v) = L_{\mathcal{F}}\left(\sum_{T \subseteq N} \Delta_v(T) u_T\right) = \sum_{T \subseteq N} \Delta_v(T) L_{\mathcal{F}}(u_T) \\ &= \sum_{T \subseteq N} \Delta_v(T) u_T^{\mathcal{F}} = \sum_{T \subseteq N} \Delta_v(T) \left[\sum_{S \in \mathcal{F}} \Delta_{u_T^{\mathcal{F}}}(S) u_S\right] \\ &= \sum_{S \in \mathcal{F}} \left[\sum_{T \subseteq N} \Delta_v(T) \Delta_{u_T^{\mathcal{F}}}(S)\right] u_S. \end{aligned}$$

De otra parte, por el Corolario 2.4.4 :

$$v^{\mathcal{F}} = \sum_{S \in \mathcal{F}} \Delta_{v^{\mathcal{F}}}(S) u_S,$$

y de ahí se verifica que

$$\Delta_{v^{\mathcal{F}}}(S) = \sum_{T \subseteq N} \Delta_v(T) \Delta_{u_T^{\mathcal{F}}}(S), \quad \text{para cada } S \in \mathcal{F}.$$

Debido a la Proposición 2.4.2,

$$\Delta_{u_T^{\mathcal{F}}}(S) = \sum_{L \subseteq S} \mu(L,S) u_T^{\mathcal{F}}(L),$$

y $u_T^{\mathcal{F}}(L) = 1$ si y sólo si existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $T \subseteq F \subseteq L \subseteq S$. Por tanto, si $T \nsubseteq S$, entonces $u_T^{\mathcal{F}}(L) = 0$ para toda $L \subseteq S$ y $\Delta_{u_T^{\mathcal{F}}}(S) = 0$. Queda finalmente

$$\Delta_{v^{\mathcal{F}}}(S) = \sum_{T \subseteq S} \Delta_v(T) \Delta_{u_T^{\mathcal{F}}}(S).$$

□

Puede observarse que la expresión resultante es, en la práctica, bastante difícil de evaluar. Sin embargo, en el caso de que el sistema $(N, \mathcal{F})$ se derive de una geometría convexa de partición se obtienen simplificaciones significativas. Ello se pone de manifiesto en los siguientes teoremas en los que, en primer lugar, se generaliza un resultado de Owen [52] que relaciona los dividendos del juego restringido $v^{\mathcal{L}}$ con los del juego v. El segundo teorema permitirá hacer un cálculo directo de los dividendos del juego restringido mediante los valores del juego v.

Teorema 3.2.4 *Sea la terna $(N, \mathcal{L}, v)$, donde $(N, \mathcal{L})$ es una geometría convexa de partición y (N, v) un juego. Para cualquier $S \in \mathcal{L}$, los dividendos del juego restringido por la geometría convexa de partición, $(N, v^{\mathcal{L}})$, verifican*

$$\Delta_{v^{\mathcal{L}}}(S) = \sum_{\{T \mid \mathcal{L}(T) = S\}} \Delta_v(T) = \sum_{\{T \mid ex(S) \subseteq T \subseteq S\}} \Delta_v(T).$$

Demostración: Haciendo un razonamiento análogo al del Teorema 3.2.3 y aplicando además la Proposición 3.2.1, se obtiene

$$\Delta_{v^{\mathcal{L}}}(S) = \sum_{T \subseteq N} \Delta_v(T) \Delta_{u_T^{\mathcal{L}}}(S) = \sum_{T \subseteq N} \Delta_v(T) \Delta_{u_{\mathcal{L}(T)}}(S),$$

para cada $S \in \mathcal{L}$. Ahora bien

$$u_{\mathcal{L}(T)} = \sum_{S \in \mathcal{L}} \Delta_{u_{\mathcal{L}(T)}}(S) u_S,$$

y como $\mathcal{L}(T) \in \mathcal{L}$, resulta que

$$\Delta_{u_{\mathcal{L}(T)}}(S) = 1 \iff S = \mathcal{L}(T).$$

Ello, junto con el hecho de ser

$$\Delta_v(\emptyset) = \sum_{H \subseteq \emptyset} (-1)^{|H|} v(H) = v(\emptyset) = 0,$$

hace que se obtenga: $\Delta_{v^{\mathcal{L}}}(S) = \sum_{\{T|\ \mathcal{L}(T)=S\}} \Delta_v(T).$

Finalmente, quedaría probar que $\{T|\mathcal{L}(T) = S\} = \{T|ex(S) \subseteq T \subseteq S\}$. En efecto, sea T tal que su envoltura $\mathcal{L}(T) = S = \mathcal{L}(S)$, porque $S \in \mathcal{L}$. Es obvio que $T \subseteq \mathcal{L}(T) = S$. Como S es convexo, la propiedad de Minkowski–Krein–Milman indica que $ex(S)$ es base de S por lo que $ex(S)$ es un conjunto minimal tal que $\mathcal{L}(ex(S)) = S$. El ser minimal asegura que $ex(S) \subseteq T \subseteq S$. Para establecer la inclusión contraria, se supone que $ex(S) \subseteq T \subseteq S$. Las envolturas verifican

$$S = \mathcal{L}(ex(S)) \subseteq \mathcal{L}(T) \subseteq \mathcal{L}(S) = S,$$

por lo que $\mathcal{L}(T) = S$ □

Teorema 3.2.5 *Sea la terna $(N, \mathcal{L}, v)$, donde $(N, \mathcal{L})$ es una geometría convexa de partición y v un juego sobre el conjunto N. Si $S \in \mathcal{L}$, entonces:*

$$\Delta_{v^{\mathcal{L}}}(S) = \sum_{\{T|\ S \setminus ex(S) \subseteq T \subseteq S\}} (-1)^{|S|-|T|} v(T).$$

Demostración: Los juegos de unanimidad convexos son una base de los juegos $v^{\mathcal{L}}$, luego aplicando el juego restringido a los convexos, se obtiene

$$v(S) = v^{\mathcal{L}}(S) = \sum_{\{T \in \mathcal{L}|\ T \subseteq S\}} \Delta_{v^{\mathcal{L}}}(T), \quad \forall S \in \mathcal{L}.$$

La familia $\mathcal{L}$ es un retículo (pág. 60). Si se considera la función característica y la función dividendo definidas sobre dicho conjunto parcialmente ordenado

$$v,\ \Delta_{v^{\mathcal{L}}}\ :\ (\mathcal{L}, \subseteq) \longrightarrow \mathbb{R},$$

y se aplica la fórmula de inversión de Möbius (pág. 21), los dividendos de $v^{\mathcal{L}}$ quedan expresados en función de los valores de v. En efecto, para toda coalición $S \in \mathcal{L}$:

$$v(S) = \sum_{\{T\in\mathcal{L} \mid T\subseteq S\}} \Delta_{v^{\mathcal{L}}}(T) \iff \Delta_{v^{\mathcal{L}}}(S) = \sum_{\{T\in\mathcal{L} \mid T\subseteq S\}} v(T)\mu(T,S).$$

La función de Möbius viene dada, en [22, Teorema 4.3], por

$$\mu(T,S) = \begin{cases} (-1)^{|S|-|T|}, & \text{si } S \setminus T \subseteq ex(S) \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Si $T \subseteq S$, entonces $S \setminus T \subseteq ex(S)$ si y sólo si $S \setminus ex(S) \subseteq T$. En consecuencia,

$$\Delta_{v^{\mathcal{L}}}(S) = \sum_{\{S\setminus ex(S)\subseteq T\subseteq S\}} (-1)^{|S|-|T|} v(T).$$

□

Nótese que si $\mathcal{L} = 2^N$, entonces todos los elementos de cualquier coalición son puntos extremales de la misma. Es decir:

$$\forall S \in 2^N = \mathcal{L} \implies S \setminus ex(S) = \emptyset,$$

y como $v^{\mathcal{L}} = v$, surge —debido al Teorema 3.2.5— que para toda $S \in 2^N$

$$\Delta_v(S) = \Delta_{v^{\mathcal{L}}}(S) = \sum_{T\subseteq S} (-1)^{|S|-|T|} v(T),$$

que es la expresión correspondiente a los dividendos de Harsanyi [33].

Corolario 3.2.6 *Sea la terna $(N, \mathcal{L}, v)$, donde $(N, \mathcal{L})$ es una geometría convexa de partición y (N, v) un juego sobre el conjunto N. El valor convexo de Shapley y de Banzhaf–Coleman satisfacen, respectivamente,*

$$\Phi_i^{\mathcal{L}}(N,v) = \sum_{\{S\in\mathcal{L}\setminus\emptyset \mid i\in S\}} \frac{1}{|S|} \left[\sum_{T\in[S^-,S]} (-1)^{|S|-|T|} v(T) \right],$$

$$\Psi_i^{\mathcal{L}}(N,v) = \sum_{\{S\in\mathcal{L}\setminus\emptyset \mid\, i\in S\}} 2^{1-|S|} \left[\sum_{T\in[S^-,S]} (-1)^{|S|-|T|} v(T) \right].$$

Es una consecuencia inmediata del Teorema 3.2.5 y la Proposición 3.1.2., en la que se establece que, para $S \in \mathcal{L}$, el intervalo $[S^-, S]$ es un álgebra de Boole y $S^- = S \setminus ex(S)$.

Ejemplo 3.2.7 Sea la terna $(N, \mathcal{L}, v)$, siendo $N = \{1, 2, 3, 4\}$,

$$v \;:\; 2^N \longrightarrow \mathbb{R}, \quad v(S) = \begin{cases} |S| - 1, & \text{si } S \in 2^N \setminus \emptyset \\ 0, & \text{si } S = \emptyset. \end{cases}$$

y $\mathcal{L} = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{2,3,4\}, N \}$.

Puede observarse (véase Figura 3.4) que el par $(N, \mathcal{L})$ es una geometría convexa de partición.

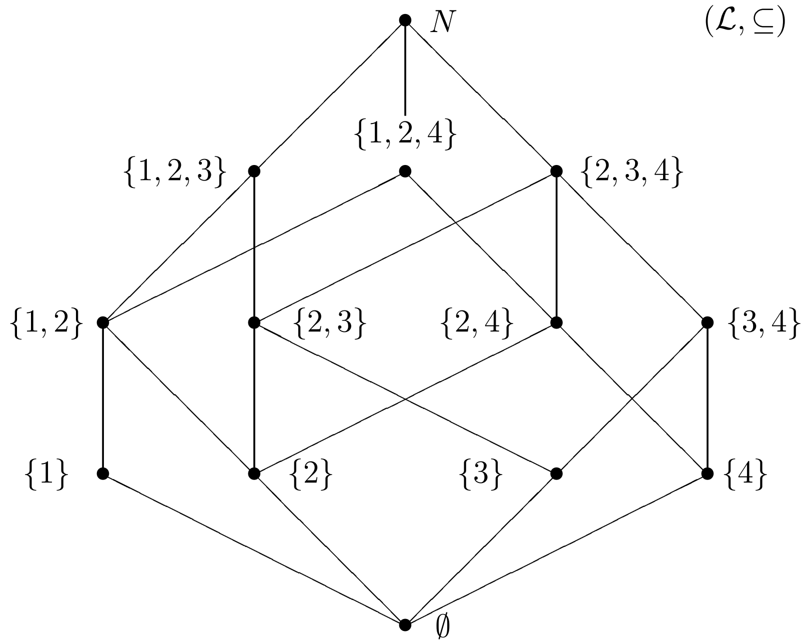


FIGURA 3.4

Utilizando resultados anteriores, los *valores convexos de Shapley* y de *Banzhaf–Coleman* vienen determinados por:

$$\Phi_i^{\mathcal{L}}(N,v) = \sum_{\{S\in\mathcal{L}\setminus\emptyset \mid i\in S\}} \frac{\Delta_{v^{\mathcal{L}}}(S)}{|S|}, \quad \Psi_i^{\mathcal{L}}(N,v) = \sum_{\{S\in\mathcal{L}\setminus\emptyset \mid i\in S\}} 2^{1-|S|}\Delta_{v^{\mathcal{L}}}(S)$$

con $\Delta_{v^{\mathcal{L}}}(S) = \sum_{T\in[S^-,S]} (-1)^{|S|-|T|}v(T)$ para $S \in \mathcal{L}$.

Por tanto, teniendo en cuenta que el intervalo $[S^-, S]$ es un álgebra de Boole en el retículo $(\mathcal{L}, \subseteq)$ (Proposición 3.1.2), se calculan en primer lugar los dividendos del juego restringido:

i) Para todo $i \in N$: $\Delta_{v^{\mathcal{L}}}(\{i\}) = \sum_{T\in[\emptyset,\{i\}]} (-1)^{1-|T|}v(T) = 0$.

ii) Si $S \in \mathcal{L}$, con $|S| = 2$, se tiene

$$\Delta_{v^{\mathcal{L}}}(\{i,j\}) = \sum_{T\in[\emptyset,\{i,j\}]} (-1)^{2-|T|}v(T) = v(\{i,j\}) = 1.$$

iii) Para las coaliciones factibles $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$ y $\{2,3,4\}$:

$$\Delta_{v^{\mathcal{L}}}(\{1,2,3\}) = \sum_{T\in[\{2\},\{1,2,3\}]} (-1)^{3-|T|}v(T) = 0,$$

$$\Delta_{v^{\mathcal{L}}}(\{1,2,4\}) = \sum_{T\in[\{2\},\{1,2,4\}]} (-1)^{3-|T|}v(T) = 0,$$

$$\Delta_{v^{\mathcal{L}}}(\{2,3,4\}) = \sum_{T\in[\emptyset,\{2,3,4\}]} (-1)^{3-|T|}v(T) = -1.$$

iv) Si $S = N$, entonces $\Delta_{v^{\mathcal{L}}}(N) = \sum_{T\in[\{2\},N]} (-1)^{4-|T|}v(T) = 0$.

De ahí: $\Phi_1^{\mathcal{L}}(N,v) = \sum_{\{S\in\mathcal{L}\setminus\emptyset \mid 1\in S\}} \frac{\Delta_{v^{\mathcal{L}}}(S)}{|S|} = \Delta_{v^{\mathcal{L}}}(\{1\}) +$

$$+\frac{1}{2}\Delta_{v^{\mathcal{L}}}(\{1,2\}) + \frac{1}{3}[\Delta_{v^{\mathcal{L}}}(\{1,2,3\}) + \Delta_{v^{\mathcal{L}}}(\{1,2,4\})] + \frac{1}{4}\Delta_{v^{\mathcal{L}}}(N) = \frac{1}{2}.$$

Análogamente: $\Phi_3^{\mathcal{L}}(N,v) = \Phi_4^{\mathcal{L}}(N,v) = \frac{2}{3}, \quad \Phi_2^{\mathcal{L}}(N,v) = \frac{7}{6}.$
Nótese que $\displaystyle\sum_{i\in N}\Phi_i^{\mathcal{L}}(N,v) = 3 = v^{\mathcal{L}}(N).$

Para el valor convexo de Banzhaf–Coleman, se obtiene:

$$\Psi_1^{\mathcal{L}}(N,v) = \frac{1}{2}, \quad \Psi_3^{\mathcal{L}}(N,v) = \Psi_4^{\mathcal{L}}(N,v) = \frac{3}{4}, \quad \Psi_2^{\mathcal{L}}(N,v) = \frac{5}{4}.$$

Teorema 3.2.8 *Sea la terna $(N,\mathcal{L},v)$, en la que $(N,\mathcal{L})$ es una geometría convexa de partición. Si (N,v) es un juego convexo, entonces se verifica que $\Phi^{\mathcal{L}}(N,v) \in C(N,v^{\mathcal{L}})$.*

Demostración: Si (N,v) es convexo, aplicando el Teorema 2.3.18, resulta que el juego restringido $(N,v^{\mathcal{L}})$ lo es, ya que $(N,\mathcal{L})$ es una familia intersectante, atómica y contiene al conjunto vacío. Si se tiene en cuenta que el valor de Shapley pertenece al *core* del juego si éste es convexo [59], resulta que

$$\Phi(N,v^{\mathcal{L}}) \in C(N,v^{\mathcal{L}}) \implies \Phi^{\mathcal{L}}(N,v) = \Phi(N,v^{\mathcal{L}}) \in C(N,v^{\mathcal{L}}).$$

□

Es evidente que la demostración del teorema anterior obliga a precisar que es también válido para cualquier terna $(N,\mathcal{C},v)$ en la que $(N,\mathcal{C})$ sea una familia intersectante atómica y contenga al conjunto vacío.

Owen, en 1988 [53], define la *extensión multilineal de Owen* del juego (N,v) como la función de n variables reales

$$f_v(q_1,\ldots,q_n) = \sum_{S\subseteq N}\left[\prod_{j\in S} q_j \prod_{j\in N\setminus S}(1-q_j)\right] v(S),$$

donde $(q_1,\ldots,q_n) \in [0,1]^n$. Además, establece que

$$f_v(q_1,\ldots,q_n) = \sum_{S\subseteq N}\prod_{j\in S} q_j \Delta_v(S),$$

donde $\Delta_v(S)$ es el dividendo de Harsanyi de S en el juego (N, v). Los valores de Shapley y de Banzhaf se obtienen mediante las fórmulas:

$$\Phi_i(N,v) = \int_0^1 \frac{\partial f_v}{\partial q_i}(t,\ldots,t)dt, \quad \Psi_i(N,v) = \frac{\partial f_v}{\partial q_i}(1/2,\ldots,1/2).$$

En 1992, Owen y Winter [54] modifican este método para calcular el valor restringido por una estructura de coalición (*CS–valor* o *valor de Owen*). En lo que sigue, se utilizarán estas ideas para determinar los $\mathcal{F}$–valores así como los *valores convexos de Shapley* y de *Banzhaf–Coleman*.

Definición 3.2.9 *Sea la terna $(N, \mathcal{F}, v)$, donde $(N, \mathcal{F})$ es un sistema de partición y (N, v) un juego sobre el conjunto N. Se define la $\mathcal{F}$–extensión multilineal de v como la extensión multilineal del $\mathcal{F}$–juego restringido. Es decir:*

$$f_v^{\mathcal{F}} : [0,1]^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \textit{siendo } f_v^{\mathcal{F}} = f_{v^{\mathcal{F}}}.$$

Teorema 3.2.10 *Sea $(N, \mathcal{F})$ un sistema de partición y sea (N, v) un juego. Entonces se verifican:*

(a) La $\mathcal{F}$–extensión multilineal de v satisface

$$f_v^{\mathcal{F}}(q_1,\ldots,q_n) = \sum_{S\in\mathcal{F}} \prod_{j\in S} q_j \Delta_{v^{\mathcal{F}}}(S).$$

(b) El $\mathcal{F}$–valor de Shapley para $i \in N$ es

$$\Phi_i^{\mathcal{F}}(N,v) = \int_0^1 \frac{\partial f_v^{\mathcal{F}}}{\partial q_i}(t,\ldots,t)dt.$$

(c) El $\mathcal{F}$–valor de Banzhaf–Coleman para $i \in N$ es

$$\Psi_i^{\mathcal{F}}(N,v) = \frac{\partial f_v^{\mathcal{F}}}{\partial q_i}(1/2,\ldots,1/2).$$

Demostración: (a) Por definición

$$f_v^{\mathcal{F}}(q_1,\ldots,q_n) = f_{v^{\mathcal{F}}}(q_1,\ldots,q_n) \sum_{S\subseteq N} \prod_{j\in S} q_j \Delta_{v^{\mathcal{F}}}(S).$$

Al ser $\Delta_{v^{\mathcal{F}}}(S) = 0$, $\forall S \notin \mathcal{F}$, resulta que

$$f_v^{\mathcal{F}}(q_1,\ldots,q_n) = \sum_{S\in\mathcal{F}} \prod_{j\in S} q_j \Delta_{v^{\mathcal{F}}}(S).$$

(b) Sea $i \in N$. La correspondiente derivada parcial:

$$\frac{\partial f_v^{\mathcal{F}}}{\partial q_i} = \sum_{S\in\mathcal{F}} \Delta_{v^{\mathcal{F}}}(S) \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\prod_{j\in S} q_j\right) = \sum_{\{S\in\mathcal{F}|\ i\in S\}} \Delta_{v^{\mathcal{F}}}(S) \prod_{\{j\in S|\ j\neq i\}} q_j.$$

Integrando a lo largo de la diagonal principal del cubo unidad $[0,1]^n$:

$$\int_0^1 \frac{\partial f_v^{\mathcal{F}}}{\partial q_i}(t,\ldots,t)dt = \sum_{\{S\in\mathcal{F}|\ i\in S\}} \Delta_{v^{\mathcal{F}}}(S) \int_0^1 t^{|S|-1} dt =$$

$$= \sum_{\{S\in\mathcal{F}|\ i\in S\}} \frac{\Delta_{v^{\mathcal{F}}}(S)}{|S|} = \Phi_i(N, v^{\mathcal{F}}) = \Phi_i^{\mathcal{F}}(N,v).$$

(c) Sea $i \in N$. Utilizando la expresión de la derivada parcial, determinada en el apartado anterior, y evaluándola en $(1/2,\ldots,1/2) \in [0,1]^n$, se tiene

$$\frac{\partial f_v^{\mathcal{F}}}{\partial q_i}(1/2,\ldots,1/2) = \sum_{\{S\in\mathcal{F}|\ i\in S\}} \left(\frac{1}{2}\right)^{|S|-1} \Delta_{v^{\mathcal{F}}} = \Psi_i^{\mathcal{F}}(N,v).$$

□

Corolario 3.2.11 *Sea la terna $(N,\mathcal{L},v)$, siendo $(N,\mathcal{L})$ una geometría convexa de partición y (N,v) un juego. La $\mathcal{L}$–extensión multilineal de v satisface*

$$f_v^{\mathcal{L}}(q_1,\ldots,q_n) = \sum_{S\in\mathcal{L}} \prod_{j\in S} q_j \left[\sum_{T\in[S^-,S]} (-1)^{|S|-|T|} v(T)\right].$$

Se deduce inmediatamente como consecuencia del teorema anterior y del Teorema 3.2.5.

Proposición 3.2.12 *Sea $(N, \mathcal{L})$ una geometría convexa de partición. Sea cualquier $T \in 2^N \setminus \emptyset$. Si se considera el correspondiente juego de unanimidad u_T, entonces*

(a)

$$\Phi_i^{\mathcal{L}}(N, u_T) = \begin{cases} \dfrac{1}{|\mathcal{L}(T)|}, & \textit{si } i \in \mathcal{L}(T), \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

(b)

$$\Psi_i^{\mathcal{L}}(N, u_T) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{|\mathcal{L}(T)|-1}}, & \textit{si } i \in \mathcal{L}(T), \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostración: Por definición, para $T \in 2^N \setminus \emptyset$ se tiene que

$$f_{u_T}^{\mathcal{L}}(q_1, \ldots, q_n) = f_{u_T^{\mathcal{L}}}(q_1, \ldots, q_n) = f_{u_{\mathcal{L}(T)}}(q_1, \ldots, q_n) = \sum_{S \in \mathcal{L}} \prod_{j \in S} q_j \Delta_{u_{\mathcal{L}(T)}}(S).$$

Al ser $\Delta_{u_{\mathcal{L}(T)}}(S) = 1$ si y sólo si $\mathcal{L}(T) = S$, resulta

$$f_{u_T}^{\mathcal{L}}(q_1, \ldots, q_n) = \prod_{j \in \mathcal{L}(T)} q_j,$$

$$\text{y} \quad \frac{\partial f_{u_T}^{\mathcal{L}}}{\partial q_i}(q_1, \ldots, q_n) = \begin{cases} \displaystyle\prod_{\{j \in \mathcal{L}(T) |\, j \neq i\}} q_j, & \text{si } i \in \mathcal{L}(T) \\ \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por tanto, aplicando el Teorema 3.2.10, si $i \in \mathcal{L}(T)$

$$\Phi_i^{\mathcal{L}}(N, u_T) = \int_0^1 \frac{\partial f_{u_T}^{\mathcal{L}}}{\partial q_i}(t, \ldots, t) dt = \int_0^1 t^{|\mathcal{L}(T)|-1} dt = \frac{1}{|\mathcal{L}(T)|},$$

y si $i \notin \mathcal{L}(T)$: $\Phi_i^{\mathcal{L}}(N, u_T) = 0$. Por otro lado, utilizando el apartado (c) del

Teorema 3.2.10, si $i \in \mathcal{L}(T)$ entonces

$$\Psi_i^{\mathcal{L}}(N, u_T) = \frac{\partial f_{u_T}^{\mathcal{F}}}{\partial q_i}(1/2, \ldots, 1/2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|\mathcal{L}(T)|-1}$$

y $\Psi_i^{\mathcal{L}}(N, u_T) = 0$ si $i \notin \mathcal{L}(T)$. $\square$

Como consecuencia inmediata de la proposición anterior, nótese que si $T \in \mathcal{L}$ entonces

$$\Phi_i^{\mathcal{L}}(N, u_T) = \begin{cases} \dfrac{1}{|T|}, & \text{si } i \in T, \\ 0, & \text{si } i \notin T. \end{cases} \quad \text{y} \quad \Psi_i^{\mathcal{L}}(N, u_T) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{|T|-1}}, & \text{si } i \in T, \\ 0, & \text{si } i \notin T. \end{cases}$$

ya que $\mathcal{L}(T) = T$.

Ejemplo 3.2.13 Considérese la misma terna, $(N, \mathcal{L}, v)$, del Ejemplo 3.2.7. Para dicha terna, se tiene que

$$f_v^{\mathcal{L}} \ : \ [0,1]^4 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_v^{\mathcal{L}}(q_1, q_2, q_3, q_4) = \sum_{S \in \mathcal{L}} \prod_{j \in S} q_j \Delta_{v^{\mathcal{L}}}(S).$$

Como $\Delta_{v^{\mathcal{L}}}(S) = 0$ salvo para las coaliciones $\{1,2\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{3,4\}$ y $\{2,3,4\}$ —cuyos dividendos son iguales a 1 para las coaliciones de dos elementos y (-1) para la coalición $\{2,3,4\}$—, resulta

$$f_v^{\mathcal{L}}(q_1, q_2, q_3, q_4) = q_1 q_2 + q_2 q_3 + q_2 q_4 + q_3 q_4 - q_2 q_3 q_4.$$

Obsérvese que la función $f_v^{\mathcal{L}}$ no es lineal para todas las componentes. Si se calcula el *gradiente* de $f_v^{\mathcal{L}}$:

$$\nabla f_v^{\mathcal{L}}(q_1, q_2, q_3, q_4) = (q_2, q_1 + q_3 + q_4 - q_3 q_4, q_2 + q_4 - q_2 q_4, q_2 + q_3 - q_2 q_3),$$

y

$$\frac{\partial f_v^{\mathcal{L}}}{\partial q_i}(t,t,t,t) = \begin{cases} t & \text{si } i = 1 \\ 3t - t^2 & \text{si } i = 2 \\ 2t - t^2 & \text{si } i = 3, 4 \end{cases},$$

con lo que

$$\Phi_1^{\mathcal{L}}(N,v) = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}, \quad \Phi_2^{\mathcal{L}}(N,v) = \int_0^1 (3t - t^2) dt = \frac{7}{6}$$

$$\Phi_3^{\mathcal{L}}(N,v) = \Phi_4^{\mathcal{L}}(N,v) = \int_0^1 (2t - t^2) dt = \frac{2}{3}.$$

Por otro lado:

$$\Psi_1^{\mathcal{L}}(N,v) = \frac{\partial f_v^{\mathcal{L}}}{\partial q_1}(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}, \quad \Psi_2^{\mathcal{L}}(N,v) = \frac{\partial f_v^{\mathcal{L}}}{\partial q_2}(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \frac{5}{4}$$

$$\Psi_3^{\mathcal{L}}(N,v) = \Psi_4^{\mathcal{L}}(N,v) = \frac{\partial f_v^{\mathcal{L}}}{\partial q_i}(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}.$$

3.3 El potencial de Hart y Mas–Colell

Sea Γ el conjunto de todos los juegos de utilidad transferible. La *función potencial* de Hart y Mas–Colell [37], es una función $P : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ que asigna a cada juego (N,v) un número real $P(N,v)$, y satisface las condiciones

$$P(\emptyset, v) = 0, \quad \sum_{i \in N} D^i P(N,v) = v(N),$$

donde $D^i P(N,v) = P(N,v) - P(N \setminus \{i\}, v_{N \setminus \{i\}})$. En la expresión anterior, se entiende por $v_{N\setminus\{i\}}$ la restricción de la función característica v a las coaliciones $S \in 2^{N\setminus\{i\}}$. Es decir, $v_{N\setminus\{i\}}(S) = v(S)$ para toda coalición $S \subseteq N \setminus \{i\}$ y, siempre que no haya algún problema de confusión, el juego $(N \setminus \{i\}, v_{N\setminus\{i\}})$ se denotará por $(N \setminus \{i\}, v)$.

El número real $D^i P(N,v)$ es denominado *contribución marginal* del jugador i al juego (N,v) y permite indicar que la función potencial exige, para todo juego (N,v), que las contribuciones marginales sean eficientes. De la condición de eficiencia de las contribuciones marginales se deduce

$$P(S,v) = \frac{1}{|S|}\left[v(S) + \sum_{i \in S} P(S \setminus \{i\}, v)\right], \quad S \in 2^N \setminus \emptyset,$$

lo que provoca, empezando con $P(\emptyset, v) = 0$, un proceso recursivo de cálculo para determinar $P(N, v)$. Además, la contribución marginal del jugador i coincide con el valor de Shapley:

$$D^i P(N,v) = P(N,v) - P(N \setminus \{i\}, v) = \Phi_i(N,v), \quad \forall i \in N.$$

Hart y Mas–Colell, en [37], demuestran las siguientes fórmulas explícitas para el potencial

$$P(N,v) = \sum_{S \subseteq N} \frac{1}{|S|} \Delta_v(S),$$

$$P(N,v) = \sum_{S \subseteq N} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} v(S), \quad \text{con } n = |N|,\ s = |S|,$$

y Winter [72] define el *potencial del valor de Myerson*, estableciendo su unicidad y demostrando que

$$P(N,G,v) - P(N \setminus \{i\}, G \setminus \{i\}, v_{N \setminus \{i\}}) = \mu_i(N,G,v), \quad \forall i \in N.$$

Entonces, dicho potencial es $P_G(N,v) = P(N, v^G)$. La extensión de Winter determina un proceso recursivo en el que se calculan los potenciales de los subjuegos $(S, (S, E(S)), v_S)$, que se denotan por $P_G(S, v)$. Si se comienza con $P_G(\emptyset, v) = 0$, el algoritmo consiste en calcular

$$P_G(S,v) = \frac{1}{|S|} \left[v^G(S) + \sum_{i \in S} P_G(S \setminus \{i\}, v) \right], \quad S \in 2^N \setminus \emptyset.$$

Posteriormente, Bilbao y López (1996)[9] establecen un nuevo algoritmo recursivo para calcular el potencial de Myerson sin necesidad de calcular los valores de v^G. Estas ideas se extienden aquí a cualquier sistema de partición y a las geometrías convexas de partición.

Definición 3.3.1 *Sea la terna $(N, \mathcal{F}, v)$, con $(N, \mathcal{F})$ un sistema de partición y (N, v) un juego. Se define el $\mathcal{F}$–potencial restringido del juego (N, v) por*

$$P^{\mathcal{F}}(N,v) = P(N, v^{\mathcal{F}}),$$

donde P es la función potencial de Hart y Mas–Colell, y $(N, v^{\mathcal{F}})$ es el juego restringido por el sistema de partición.

La definición implica que puede establecerse el siguiente proceso recursivo para determinar el $\mathcal{F}$–potencial del juego restringido (N, v):

$$P(\emptyset, v^{\mathcal{F}}) = 0, \quad P(S, v^{\mathcal{F}}) = \frac{1}{|S|}\left[v^{\mathcal{F}}(S) + \sum_{i \in S} P(S \setminus \{i\}, v^{\mathcal{F}})\right], \; S \in 2^N \setminus \emptyset,$$

y las contribuciones marginales verifican, para cada $i \in N$:

$$D^i P(N, v^{\mathcal{F}}) = P(N, v^{\mathcal{F}}) - P(N \setminus \{i\}, v^{\mathcal{F}}) = \Phi_i(N, v^{\mathcal{F}}) = \Phi_i^{\mathcal{F}}(N, v).$$

Proposición 3.3.2 *Sea la terna $(N, \mathcal{F}, v)$, con $(N, \mathcal{F})$ un sistema de partición y (N, v) un juego. Para todo subjuego (S, v), $S \subseteq N$, existe el $\mathcal{F}_S$–potencial restringido*

$$P^{\mathcal{F}_S}(S, v) = P(S, v^{\mathcal{F}}),$$

donde $\mathcal{F}_S = \{T \in \mathcal{F} \mid T \subseteq S\}$.

Demostración: Si $(N, \mathcal{F})$ es un sistema de partición, entonces $(S, \mathcal{F}_S)$, en el que $S \subseteq N$ y $\mathcal{F}_S = \{T \in \mathcal{F} | \; T \subseteq S\}$, también lo es. Al ser $(S, \mathcal{F}_S)$ un sistema de partición, puede considerarse el correspondiente juego restringido $(S, v^{\mathcal{F}_S})$ para el que es inmediato probar que

$$(S, v^{\mathcal{F}_S}) = (S, v^{\mathcal{F}}).$$

En efecto, considérese $v^{\mathcal{F}_S}, \; v^{\mathcal{F}} : 2^S \longrightarrow \mathbb{R}$. Si $T \in 2^S \cap \mathcal{F}$, entonces $T \in \mathcal{F}_S$ y $v^{\mathcal{F}}(T) = v(T) = v^{\mathcal{F}_S}(T)$.
Si $T \subseteq S$ pero $T \notin \mathcal{F}$, entonces $T = \bigcup_k T_k$. Al ser $T_k \subset T \subseteq S$ y $T_k \in \mathcal{F}$, resulta que las $\mathcal{F}$– componentes de T son también sus $\mathcal{F}_S$–componentes y, por tanto

$$v^{\mathcal{F}}(T) = v^{\mathcal{F}_S}(T).$$

Así, son ciertas y tienen sentido las igualdades:

$$P(S, v^{\mathcal{F}}) = P(S, v^{\mathcal{F}_S}) = P^{\mathcal{F}_S}(S, v)$$

□

Utilizando la misma notación que para la función característica correspondiente a un subjuego, se escribirá $P^{\mathcal{F}}(S, v)$ para indicar $P^{\mathcal{F}_S}(S, v)$, siempre que no haya algún problema de confusión.

La proposición anterior hace que el proceso recursivo indicado en el párrafo previo a la misma pueda expresarse formalmente de la siguiente manera:

$$P^{\mathcal{F}}(\emptyset, v) = 0, \quad P^{\mathcal{F}}(S, v) = \frac{1}{|S|}\left[v^{\mathcal{F}}(S) + \sum_{i \in S} P^{\mathcal{F}}(S \setminus \{i\}, v)\right], \; S \in 2^N \setminus \emptyset.$$

Además, puede generalizarse el resultado de Winter para el potencial del valor de Myerson.

Proposición 3.3.3 *Sea $(N, \mathcal{F}, v)$, con $(N, \mathcal{F})$ un sistema de partición y (N, v) un juego. Entonces, el $\mathcal{F}$–valor de Shapley viene determinado por*

$$\Phi_i^{\mathcal{F}}(N, v) = P^{\mathcal{F}}(N, v) - P^{\mathcal{F} \setminus i}(N \setminus \{i\}, v),$$

donde $\mathcal{F} \setminus i = \mathcal{F}_{N \setminus \{i\}}$.

Demostración: Las contribuciones marginales verifican, para cada $i \in N$:

$$D^i P(N, v^{\mathcal{F}}) = P(N, v^{\mathcal{F}}) - P(N \setminus \{i\}, v^{\mathcal{F}}) = \Phi_i(N, v^{\mathcal{F}}) = \Phi_i^{\mathcal{F}}(N, v).$$

La Proposición 3.3.2 implica, de forma inmediata, la tesis. □

Como consecuencia directa de las propiedades de función potencial, dadas por Hart y Mas–Colell, puede establecerse el siguiente resultado.

Proposición 3.3.4 *Sea $(N, \mathcal{F}, v)$, con $(N, \mathcal{F})$ un sistema de partición y (N, v) un juego.*

(a) Si (N, v) es equilibrado y $v(N) = v^{\mathcal{F}}(N)$, entonces $P^{\mathcal{F}}(N, v) \leq v(N)$.

(b) Si (N,v) es totalmente equilibrado, superaditivo y $v(N)=v^{\mathcal{F}}(N)$, entonces

$$P^{\mathcal{F}}(S,v) \leq v(S), \quad \forall S \subseteq N.$$

Demostración: (a) Si (N,v) es equilibrado, el Teorema 2.3.14 (a) implica que $(N,v^{\mathcal{F}})$ también lo es. Entonces,

$$P^{\mathcal{F}}(N,v) = P(N,v^{\mathcal{F}}) \leq v^{\mathcal{F}}(N) = v(N),$$

donde la desigualdad central es probada por Hart y Mas–Colell [37, Corolario 2].

(b) El Teorema 2.3.14 (b) implica que el juego restringido $(N,v^{\mathcal{F}})$ es totalmente equilibrado. Entonces, el apartado anterior garantiza que, para toda $S \subseteq N$

$$P^{\mathcal{F}}(S,v) = P(S,v^{\mathcal{F}}) \leq v^{\mathcal{F}}(S).$$

Además, si (N,v) es superaditivo, entonces $v^{\mathcal{F}}(S) \leq v(S)$, para cualquier coalición $S \subseteq N$. □

A continuación, se va a establecer un nuevo algoritmo recursivo para calcular el $\mathcal{F}$–potencial restringido del juego (N,v), sin necesidad de calcular los valores de la función característica del juego restringido $(N,v^{\mathcal{F}})$.

Teorema 3.3.5 *El $\mathcal{F}$–potencial restringido, verifica:*

(a)

$$P^{\mathcal{F}}(S,v) = \frac{1}{|S|}\left[v(S) + \sum_{i\in S} P^{\mathcal{F}}(S\setminus\{i\},v)\right], \quad si\ S \in \mathcal{F}\setminus\emptyset.$$

(b)

$$P^{\mathcal{F}}(S,v) = \sum\{P^{\mathcal{F}}(S_k,v) \mid S_k \in \Pi_S\}, \quad si\ S \notin \mathcal{F}.$$

Demostración: (a) Es inmediata ya que si $S \in \mathcal{F}$, entonces $v^{\mathcal{F}}(S) = v(S)$.

(b) Los juegos de unanimidad u_T, con $T \in \mathcal{F}$, constituyen una base del espacio imagen $L(\Gamma^N)$, por lo que

$$v^{\mathcal{F}} = \sum_{T \in \mathcal{F} \setminus \emptyset} \Delta_{v^{\mathcal{F}}}(T) u_T.$$

Aplicando la Proposición 1 de Hart y Mas–Colell [37] al subjuego $(S, v^{\mathcal{F}})$, se tiene que

$$P^{\mathcal{F}}(S, v) = P(S, v^{\mathcal{F}}) = \sum_{\{T \in \mathcal{F} \setminus \emptyset \mid T \subset S\}} \frac{1}{|T|} \Delta_{v^{\mathcal{F}}}(T),$$

donde $\Delta_{v^{\mathcal{F}}}(T)$ son los dividendos de T en el juego restringido.

Se sabe que si $S \notin \mathcal{F}$, entonces $S = \bigcup_{k=1}^{p} S_k$, siendo $\{S_k\} = \Pi_S$ la partición de S en sus $\mathcal{F}$–componentes. Dado que la partición de S induce la partición

$$\{T \in \mathcal{F} \mid T \subset S\} = \bigcup_{k=1}^{p} \{T \in \mathcal{F} \mid T \subseteq S_k\},$$

se obtiene

$$P^{\mathcal{F}}(S, v) = \sum_{k=1}^{p} \left[\sum_{\{T \in \mathcal{F} \setminus \emptyset \mid T \subseteq S_k\}} \frac{1}{|T|} \Delta_{v^{\mathcal{F}}}(T) \right] = \sum_{k=1}^{p} P^{\mathcal{F}}(S_k, v).$$

□

Ejemplo 3.3.6 Sea la terna $(N, \mathcal{F}, v)$, siendo $(N, \mathcal{F})$ el sistema de partición derivado de la geometría convexa considerada en el Ejemplo 3.2.7. Es decir: $N = \{1, 2, 3, 4\}$, $v \, : \, 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$v(S) = \begin{cases} |S| - 1, & \text{si } S \in 2^N \setminus \emptyset \\ 0, & \text{si } S = \emptyset. \end{cases} ,$$

y $\mathcal{F} = \{ \, \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\},$
$\{2,3,4\}, N \, \}$.

Se va a determinar el $\mathcal{F}$–valor de Shapley, $\Phi_i^{\mathcal{F}}(N, v)$, utilizando el $\mathcal{F}$–potencial restringido del juego (N, v), las propiedades de las contribuciones marginales y el procedimiento recursivo que se desprende del Teorema 3.3.5.

El algoritmo comienza con:

$$P^{\mathcal{F}}(\emptyset, v) = 0, \quad P^{\mathcal{F}}(\{i\}, v) = v(\{i\}) = 0\ ,\ \forall i \in N.$$

Utilizando el apartado (b) del Teorema 3.3.5, se determina el $\mathcal{F}$–potencial restringido de las coaliciones no factibles por medio de la suma del potencial de sus $\mathcal{F}$–componentes. En efecto, si $S \notin \mathcal{F}$ y $|S| = 2$:

$$P^{\mathcal{F}}(\{i,j\}, v) = P^{\mathcal{F}}(\{i\}, v) + P^{\mathcal{F}}(\{j\}, v) = 0$$

Las coaliciones factibles $\{1,2\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{3,4\}$, verifican:

$$P^{\mathcal{F}}(\{i,j\}, v) = \frac{1}{2}[v(\{i,j\}) + P^{\mathcal{F}}(\{i\}, v) + P^{\mathcal{F}}(\{j\}, v)] = \frac{1}{2}.$$

Se procede de manera análoga con las coaliciones de tres elementos. Para la coalición $S = \{1,3,4\} \notin \mathcal{F}$:

$$P^{\mathcal{F}}(\{1,3,4\}, v) = P^{\mathcal{F}}(\{1\}) + P^{\mathcal{F}}(\{3,4\}) = \frac{1}{2}.$$

Para las coaliciones factibles $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{2,3,4\}$:

$$P^{\mathcal{F}}(\{1,2,3\}, v) = \frac{1}{3}\left[v(\{1,2,3\}) + \sum_{i \in \{1,2,3\}} P^{\mathcal{F}}(\{1,2,3\} \setminus \{i\}, v)\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[2 + P^{\mathcal{F}}(\{2,3\}) + P^{\mathcal{F}}(\{1,3\}) + P^{\mathcal{F}}(\{1,2\})\right] = \frac{1}{3}[2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}] = 1,$$

y de forma análoga

$$P^{\mathcal{F}}(\{1,2,4\}, v) = \frac{1}{3}\left[v(\{1,2,4\}) + \sum_{i \in \{1,2,4\}} P^{\mathcal{F}}(\{1,2,4\} \setminus \{i\}, v)\right] = 1,$$

$$P^{\mathcal{F}}(\{2,3,4\}, v) = \frac{1}{3}\left[v(\{2,3,4\}) + \sum_{i \in \{2,3,4\}} P^{\mathcal{F}}(\{2,3,4\} \setminus \{i\}, v)\right] = \frac{7}{6}.$$

Por último

$$P^{\mathcal{F}}(N, v) = \frac{1}{4}\left[v(N) + \sum_{i \in N} P^{\mathcal{F}}(N \setminus \{i\}, v)\right] = \frac{5}{3}.$$

Aplicando la Proposición 3.3.3, el $\mathcal{F}$–valor de Shapley (en este caso es el *valor convexo de Shapley*) de cada jugador es:

$$\begin{aligned}
\Phi_1^{\mathcal{F}}(N,v) &= P^{\mathcal{F}}(N,v) - P^{\mathcal{F}}(N \setminus \{1\},v) = \frac{5}{3} - \frac{7}{6} = \frac{1}{2}\\
\Phi_2^{\mathcal{F}}(N,v) &= P^{\mathcal{F}}(N,v) - P^{\mathcal{F}}(N \setminus \{2\},v) = \frac{7}{6}\\
\Phi_3^{\mathcal{F}}(N,v) &= P^{\mathcal{F}}(N,v) - P^{\mathcal{F}}(N \setminus \{3\},v) = \frac{2}{3}\\
\Phi_4^{\mathcal{F}}(N,v) &= P^{\mathcal{F}}(N,v) - P^{\mathcal{F}}(N \setminus \{4\},v) = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

En el caso de una terna $(N,\mathcal{L},v)$, en la que el par $(N,\mathcal{L})$ es una geometría convexa de partición, el $\mathcal{L}$–potencial restringido del juego (N,v) se denominará *potencial convexo* del juego (N,v). En esta situación particular, las fórmulas explícitas para el potencial $P^{\mathcal{L}}(N,v)$ se obtienen usando distintas fórmulas para los dividendos del juego restringido por la geometría convexa de partición.

Proposición 3.3.7 *Sea $(N,\mathcal{L},v)$ una terna, siendo $(N,\mathcal{L})$ una geometría convexa de partición y (N,v) un juego. Entonces:*

$$P^{\mathcal{L}}(N,v) = \sum_{S\in\mathcal{L}\setminus\{\emptyset\}} \frac{1}{|S|}\left[\sum_{T\in[S^-,S]} (-1)^{|S|-|T|} v(T)\right],$$

donde $S^- = S \setminus ex(S)$.

Demostración: La tesis resulta teniendo en cuenta que

$$P^{\mathcal{L}}(N,v) = \sum_{S\in\mathcal{L}\setminus\emptyset} \frac{\Delta_{v^{\mathcal{L}}}(S)}{|S|},$$

y aplicando el Teorema 3.2.5. □

Teorema 3.3.8 *Sea $(N,\mathcal{L},v)$ una terna, siendo $(N,\mathcal{L})$ una geometría convexa de partición y (N,v) un juego. Entonces:*

$$P^{\mathcal{L}}(N,v) = \sum_{T\in\mathcal{L}} \frac{(t-1)!(t^+-t)!}{t^+!} v(T), \quad \textit{donde } t=|T|,\ t^+=|T^+|.$$

Demostración: La Proposición 3.3.7 asegura que

$$P^{\mathcal{L}}(N,v) = \sum_{S\in\mathcal{L}\setminus\{\emptyset\}} \frac{1}{|S|}\left[\sum_{T\in[S^-,S]} (-1)^{|S|-|T|}v(T)\right],$$

e invirtiéndo el orden de las sumas a realizar, se obtiene

$$P^{\mathcal{L}}(N,v) = \sum_{T\in\mathcal{L}}\left[\sum_{\{S\in\mathcal{L}\setminus\emptyset |\, T\in[S^-,S]\}} \frac{(-1)^{|S|-|T|}}{|S|}\right] v(T) = \sum_{T\in\mathcal{L}} c(T)v(T).$$

Si $T=\emptyset$, entonces $v(T)=0$. Si se fija $T\in\mathcal{L}\setminus\emptyset$, se va a demostrar que

$$\{S\in\mathcal{L}\setminus\emptyset \mid T\in[S^-,S]\} = [T,T^+].$$

Para probar la anterior igualdad se procede por doble inclusión. En primer lugar, si $S\in\mathcal{L}\setminus\emptyset$ y $S^-\subseteq T\subseteq S$, habrá que demostrar que $T\subseteq S\subseteq T^+$. Como $T\subseteq S$, bastará probar que $S\subseteq T^+$ lo cual es equivalente a que $S\setminus T\subseteq T^+\setminus T$. En efecto, si $j\in S\setminus T$:

$$S^-\cup\{j\}\subseteq T\cup\{j\}\subseteq S\cup\{j\} = S \Longrightarrow T\cup\{j\}\in[S^-,S] \Longrightarrow T\cup\{j\}\in\mathcal{L}.$$

Luego, $j\in T^+\setminus T$, ya que

$$T^+ = T\cup\{j\in N\setminus T \mid T\cup\{j\}\in\mathcal{L}\}.$$

Reciprocamente, supóngase que $S\in[T,T^+]$. La Proposición 3.1.7 asegura que $S\in\mathcal{L}\setminus\emptyset$, con lo que únicamente hay que probar que $S^-\subseteq T$ o, lo que es lo mismo, $S\setminus T\subseteq ex(S)$. En efecto, si $j\in S\setminus T$:

$$T = T\setminus\{j\}\subseteq S\setminus\{j\}\subseteq T^+\setminus\{j\}\subseteq T^+ \Longrightarrow S\setminus\{j\}\in[T,T^+] \Longrightarrow S\setminus\{j\}\in\mathcal{L}.$$

Luego, por definición de elemento extremal de S, $j\in ex(S)$.

Como consecuencia de lo anterior:

$$c(T) = \sum_{S\in[T,T^+]} \frac{(-1)^{s-t}}{s} = \sum_{R\subseteq T^+\setminus T} \frac{(-1)^r}{t+r},$$

donde $s = |S|$, $t = |T|$, $R = S \setminus T$ y $r = |R|$. Entonces, se tiene

$$c(T) = \sum_{r=0}^{t^+-t} \left(\begin{array}{c} t^+ - t \\ r \end{array} \right) \frac{(-1)^r}{t+r} = \sum_{r=0}^{t^+-t} \left(\begin{array}{c} t^+ - t \\ r \end{array} \right) (-1)^r \int_0^1 x^{t+r-1} dx =$$

$$\int_0^1 x^{t-1} \sum_{r=0}^{t^+-t} \left(\begin{array}{c} t^+ - t \\ r \end{array} \right) (-x)^r dx = \int_0^1 x^{t-1} (1-x)^{t^+-t} dx.$$

Al ser la integral resultante la función Beta, queda finalmente que el $\mathcal{L}$–potencial restringido del juego (N, v) viene dado por

$$P^{\mathcal{L}}(N, v) = \sum_{T \in \mathcal{L}} \frac{(t-1)!(t^+-t)!}{t^+!} v(T), \quad \text{donde } t = |T|,\ t^+ = |T^+|.$$

$\square$

En el caso especial de ser $\mathcal{L} = 2^N$, se tiene que $T^+ = N$ para toda coalición $T \in \mathcal{L}$. Entonces, surge

$$P(N, v) = \sum_{S \subseteq N} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} v(S),$$

que es la expresión correspondiente del potencial de Hart y Mas–Colell para el juego (N, v).

3.4 Juegos Simples

La teoría de juegos simples estudia juegos cooperativos en los que cualquier coalición es ganadora o perdedora, sin que existan posibilidades intermedias. Estos juegos permiten modelar distintas situaciones económicas, sociales y políticas e incluyen a los juegos de mayorías que predicen y analizan la formación de coaliciones en organizaciones estables, parlamentos y gobiernos.

Dada la diversidad de situaciones en las que se emplean los juegos simples y debido a que son monótonos y a que el recorrido de su función característica es el conjunto binario $\{0,1\}$, hace que sea de interés y posible buscar algunas simplificaciones en el cálculo de los dividendos del $\mathcal{F}$–juego restringido, cuando éste exista.

Previamente, conviene recordar que si el juego (N,v) es simple, entonces el $\mathcal{F}$–juego restringido por un sistema de partición no lo es en general; que puede asegurarse el carácter de juego simple del juego $(N,v^{\mathcal{F}})$ si el juego (N,v) es simple y propio, y que en ese caso

$$v^{\mathcal{F}}(S) = \text{máx}\{v(S_k) \mid S_k \in \Pi_S\}, \quad \forall S \in 2^N.$$

Además, en un juego simple (N,v), las coaliciones de N son únicamente ganadoras o perdedoras y, por ello, tiene sentido considerar el conjunto $\mathcal{W}$ de coaliciones ganadoras y el conjunto $\mathcal{MW}$ de coaliciones minimales ganadoras, definidos de la siguiente forma:

$$\mathcal{W} = \{S \subseteq N \mid v(S) = 1\},$$

$$\mathcal{MW} = \{S \subseteq N \mid v(S) = 1 \text{ y } v(T) = 0,\ \forall T \subset S,\ T \neq S\}.$$

Es evidente que $\mathcal{MW} \subseteq \mathcal{W}$ y, ambos conjuntos, van a ser determinantes en el cálculo de los dividendos. Ello se pone de manifiesto en los siguientes resultados.

Proposición 3.4.1 *Sea la terna $(N,\mathcal{F},v)$ tal que (N,v) es un juego simple y $(N,\mathcal{F})$ un sistema de partición.*

(a) Si $S \notin \mathcal{W}$, entonces $\Delta_{v^{\mathcal{F}}}(S) = 0$.

(b) Si $S \in \mathcal{MW} \cap \mathcal{F}$, entonces $\Delta_{v^{\mathcal{F}}}(S) = 1$

(c) Si v es cero–normalizado y $|S| = 2$, entonces:

$$\Delta_{v^{\mathcal{F}}}(S) = 1 \quad \textit{si y sólo si } S \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W}.$$

Demostración: (a) Si $S \notin \mathcal{W}$, entonces $v(S) = 0$ y $v(H) = 0$, para toda $H \subseteq S$. Como

$$\Delta_{v^{\mathcal{F}}}(S) = \sum_{H \subseteq S} (-1)^{|S|-|H|} v^{\mathcal{F}}(H) \quad \text{y} \quad v^{\mathcal{F}}(H) = \sum_{k} v(H_k),$$

resulta que, para toda $H \subseteq S$:

$$\forall k,\ v(H_k) = 0 \implies v^{\mathcal{F}}(H) = 0 \implies \Delta_{v^{\mathcal{F}}}(S) = 0.$$

(b) Si $S \in \mathcal{F} \cap \mathcal{MW}$, entonces

$$\Delta_{v^{\mathcal{F}}}(S) = \sum_{H \subseteq S} (-1)^{|S|-|H|} v^{\mathcal{F}}(H) = v^{\mathcal{F}}(S),$$

ya que $v^{\mathcal{F}}(H) = 0$, para toda $H \subset S \in \mathcal{MW}$. Al ser $S \in \mathcal{F}$, se tiene que $v^{\mathcal{F}}(S) = v(S) = 1$ y queda finalmente la tesis.

(c) Si $S \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$, resulta que

$$\Delta_{v^{\mathcal{F}}}(S) = \sum_{H \subseteq S} (-1)^{|S|-|H|} v^{\mathcal{F}}(H) = v^{\mathcal{F}}(S) = v(S) = 1,$$

ya que el juego $(N, v^{\mathcal{F}})$ es también cero–normalizado.

Recíprocamente, si $S \notin \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$, o bien $S \notin \mathcal{F}$, con lo que su dividendo $\Delta_{v^{\mathcal{F}}}(S) = 0$; o bien $S \notin \mathcal{W}$, con lo que $\Delta_{v^{\mathcal{F}}}(S) = v(S) = 0$. □

Como consecuencia inmediata del apartado (a) de la proposición anterior, resulta

Corolario 3.4.2 *Sea la terna $(N, \mathcal{F}, v)$ tal que (N, v) es un juego simple y $(N, \mathcal{F})$ un sistema de partición. Para el juego restringido $(N, v^{\mathcal{F}})$, se tiene que*

(a) El $\mathcal{F}$–valor de Shapley es

$$\Phi_i^{\mathcal{F}}(N, v) = \sum_{\{S \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W} |\ i \in S\}} \frac{\Delta_{v^{\mathcal{F}}}(S)}{|S|}, \quad \forall i \in N.$$

(b) El $\mathcal{F}$–valor de Banzhaf–Coleman es

$$\Psi_i^{\mathcal{F}}(N,v) = \sum_{\{S\in\mathcal{F}\cap\mathcal{W}|\ i\in S\}} 2^{1-|S|}\Delta_{v^{\mathcal{F}}}(S), \quad \forall i\in N.$$

(c) La $\mathcal{F}$–extensión multilineal de Owen es

$$f_v^{\mathcal{F}}(q_1,\dots,q_n) = \sum_{S\in\mathcal{F}\cap\mathcal{W}}\prod_{j\in S} q_j\Delta_{v^{\mathcal{F}}}(S).$$

(d) El $\mathcal{F}$–potencial restringido de Hart y Mas–Collel es

$$P(N,v^{\mathcal{F}}) = \sum_{S\in\mathcal{F}\cap\mathcal{W}}\frac{1}{|S|}\Delta_{v^{\mathcal{F}}(S)}.$$

Proposición 3.4.3 *Sea $(N,\mathcal{L})$ una geometría convexa de partición y (N,v) un juego simple. Para los dividendos del $\mathcal{L}$–juego restringido se verifica que si $S\in\mathcal{L}\cap\mathcal{W}$ y $S\setminus ex(S)\in\mathcal{W}$, entonces $\Delta_{v^{\mathcal{L}}}(S)=0$.*

Demostración: Si $S\setminus ex(S)\in\mathcal{W}$, tenemos que todas las coaliciones del intervalo $[S\setminus ex(S),S]$ son ganadoras. Entonces, como el intervalo de coaliciones convexas $[S\setminus ex(S),S]$ es isomorfo a $2^{ex(S)}$ (Proposición 3.1.2) resulta que, aplicando el Teorema 3.2.5

$$\Delta_{v^{\mathcal{L}}}(S) = \sum_{\{S\setminus ex(S)\subseteq T\subseteq S\}}(-1)^{|S|-|T|} = \sum_{B\subseteq ex(S)}(-1)^{|B|} = 0,$$

donde $B = S\setminus T$. □

Capítulo 4

Juegos Restringidos por Conjuntos Parcialmente Ordenados

En este capítulo se va a estudiar un sistema de coaliciones factibles definido por un orden parcial en el conjunto de los jugadores. De ahí que, en lo que sigue, se considerarán conjuntos finitos parcialmente ordenados $P = (N, \leq)$ y se analizarán las características del sistema de coaliciones factibles construido a partir de la clase de los conjuntos convexos.

4.1 Convexidad en conjuntos ordenados

Sea $P = (N, \leq)$ un conjunto finito parcialmente ordenado. Se dice que $A \subseteq N$ es *convexo* en P cuando se verifica que,

$$a \in A,\ b \in A \quad \text{y} \quad a \leq b \implies [a, b] \subseteq A.$$

El conjunto formado por los *convexos* en P se denotará por

$$Co(P) = \{S \subseteq N \mid S \text{ es convexo en } P\}.$$

Si $P = (N, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, se denotará por $P^* = (N, \leq)$ al dual de P, donde el orden de P^* es

$$x \leq y \;\text{ en } P^* \Longleftrightarrow y \leq x \;\text{ en } P.$$

Birkoff y Bennett establecen [10, Teorema 5] que $Co(P) \simeq Co(P^*)$, para cualquier P.

Ejemplo 4.1.1 Sea $N = \{1, 2, 3, 4\}$, con la relación de orden parcial cuyo diagrama de Hasse es el de la Figura 4.1,

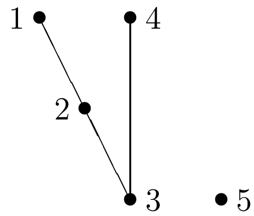


FIGURA 4.1

Para este conjunto $P = (N, \leq)$, se tiene que

$Co(P) = \{\ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,5\}, \{1,4,5\}, \{2,3,4\}, \{2,3,5\}, \{2,4,5\}, \{3,4,5\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,5\}, \{2,3,4,5\}, N\ \}$.

La definición implica que, para todo $i \in N$, $\{i\} \in Co(P)$ con lo que el par $(N, Co(P))$ *es un sistema de coaliciones factibles.* Entonces, dado un juego (N, v), si los jugadores están relacionados mediante una relación de orden, tiene sentido considerar la terna $(N, Co(P), v)$ y el correspondiente juego de cooperación restringida,

$$\tilde{v}^{Co(P)} \mid 2^N \longrightarrow \mathbb{R},\ \tilde{v}^{Co(P)}(S) = \text{máx}\left\{\sum_i v(T_i) \mid \{T_i\} \in \mathcal{P}_{Co(P)}(S)\right\},$$

siendo $\mathcal{P}_{Co(P)}(S)$ el conjunto de las particiones de la coalición S en convexos de P.

Es inmediato probar que si $A, B \in Co(P)$, entonces $A \cap B \in Co(P)$ lo cual indica que $(N, Co(P))$ es un espacio de clausura. Además, Edelman [22], Birkoff y Bennett [10] establecen que $(N, Co(P))$ verifica la propiedad de Minkowski–Krein–Milman y es, por tanto, una *geometría convexa atómica* denominada *order convex* en N.

Al ser $(N, Co(P))$ un sistema de coaliciones factibles, cualquier subconjunto de N puede expresarse como unión de sus *convexos maximales* (Definición 2.2.15, Proposición 2.2.16). En esta circunstancia particular, y debido a que el par $(N, Co(P))$ es una geometría convexa, la definición de convexo maximal de $S \subseteq N$ en P es equivalente a la dada por Tijs en [63]. Ello se prueba en la siguiente proposición

Proposición 4.1.2 *Sea $(N, Co(P))$ un sistema de coaliciones factibles y sea $S \subseteq N$. Si $T \in Co(P)$ y $T \subseteq N$, entonces T es convexo maximal de S en P si y sólo si*

$$\forall i \in S \setminus T, \quad T \cup \{i\} \notin Co(P).$$

Demostración: $(\Rightarrow)$ Sea $i \in S \setminus T$ tal que $T \cup \{i\} \in Co(P)$. Entonces, existe $T' = T \cup \{i\}$ con $T \subset T' \subseteq S$, lo cual va en contra de la hipótesis.

$(\Leftarrow)$ Teniendo en cuenta que $(N, Co(P))$ es una geometría convexa, los elementos de $Co(P)$ que cubren a T son de la forma $T \cup \{i\}$, $i \in N \setminus T$ (Proposición 3.1.7). Si $T \cup \{i\} \notin Co(P)$, $\forall i \in S \setminus T$, entonces no hay ningún subconjunto de S que pertenezca a $Co(P)$ y que cubra a T. Ello implica que T es maximal en S. $\square$

Nótese que esta caracterización de los convexos maximales es cierta en cualquier geometría convexa $(N, \mathcal{L})$ y también que, en general, el sistema de coaliciones factibles $(N, Co(P))$ no constituye un sistema de partición.

Ejemplo 4.1.3 Sea $(N, \leq)$ el conjunto parcialmente ordenado, cuyo diagrama de Hasse es el de la Figura 4.2,

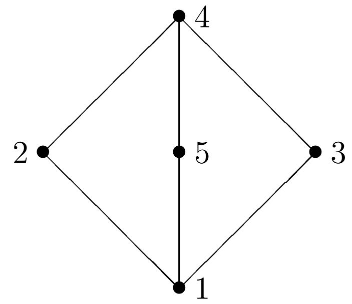


FIGURA 4.2

El par $(N, Co(P))$ no es un sistema de partición porque, usando la Proposición 2.3.6, $\{1,3\} \in Co(P)$, $\{3,4\} \in Co(P)$, tienen intersección no vacía y, sin embargo, $\{1,3\} \cup \{3,4\} \notin Co(P)$ debido a que $1 \leq 4$ y $[1,4] \nsubseteq \{1,3,4\}$.

Tampoco el par $(N, Co(P))$ contemplado en el Ejemplo 4.1.1 es un sistema de partición ya que $\{3,5\}, \{1,5\} \in Co(P)$ y $\{3,5\} \cup \{1,5\} \notin Co(P)$.

Sea $P = (N, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado cuya *longitud* o *rango* $l(P)$ [62] sea menor o igual que uno. Es decir:

$$l(P) = \max\{l(C) \mid C \text{ es una cadena en } P \text{ y } l(C) = |C| - 1\} \leq 1.$$

Entonces $(N, Co(P))$ es una *geometría convexa de partición*. Esto es debido a que todo subconjunto de N es convexo, ya que o bien es un átomo o es una cadena formada por dos elementos de N, lo que implica que $Co(P) \simeq 2^N$. Por ejemplo, todos los $Co(P)$ que surgen de las diferentes situaciones contempladas en la Figura 4.3 son isomorfos a 2^4. En estas condiciones ($l(P) \leq 1$), si se considera el $Co(P)$–juego restringido por el sistema de partición o la geometría convexa de partición asociado a la terna $(N, Co(P), v)$, se verifica que

$$v^{Co(P)}(S) = v(S), \ \forall S \in 2^N,$$

y, por tanto, el juego restringido coincide con el juego original.

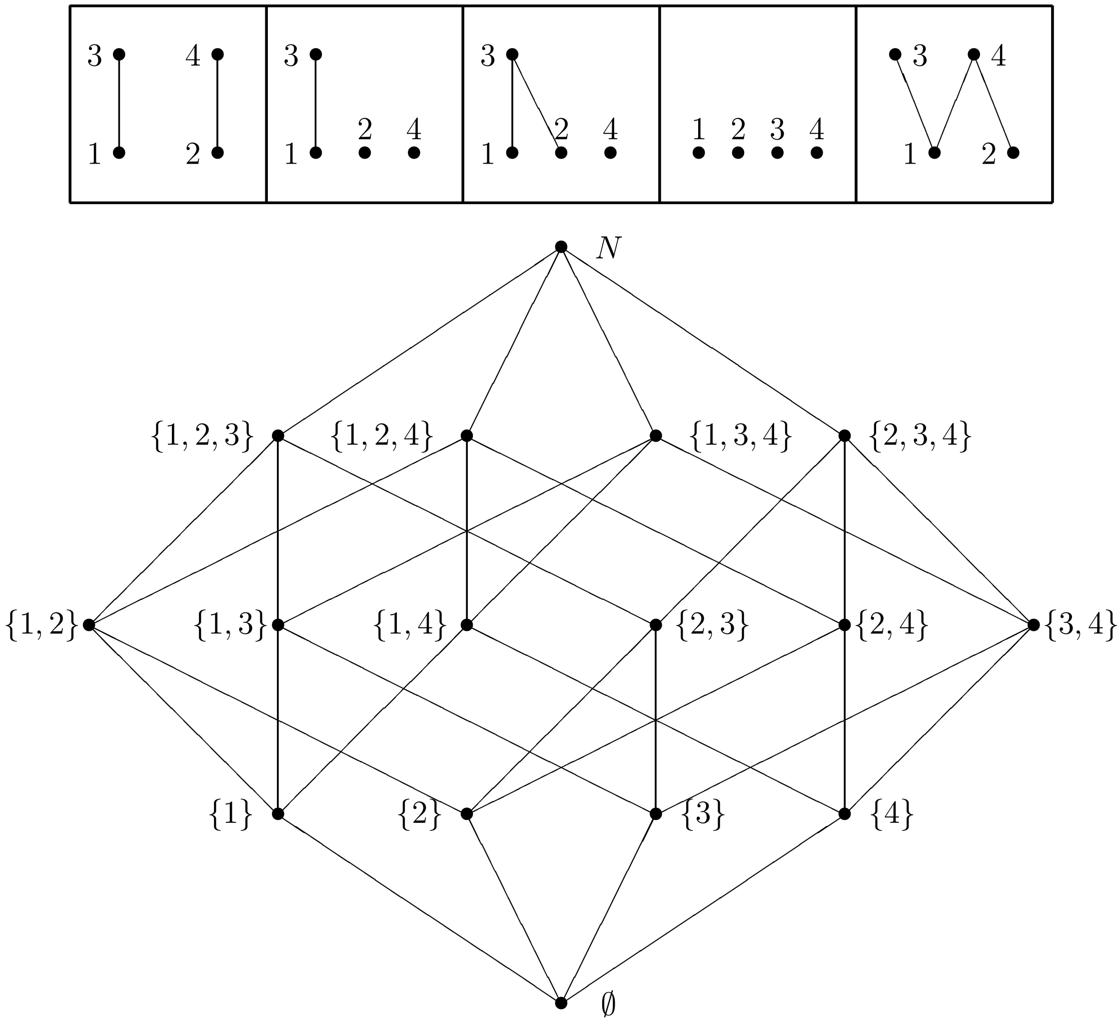


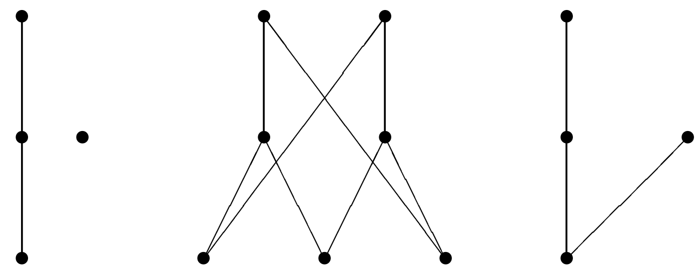
FIGURA 4.3: $(Co(P), \subseteq) \simeq (2^4, \subseteq)$

4.2 El sistema de partición $(N, Co(P))$

En la sección anterior se ha comprobado que si $l(P) \geq 2$, la geometría convexa atómica constituida por el par $(N, Co(P))$ no es, en general, un sistema de partición. De ahí que, en esta sección, se consideren únicamente conjuntos parcialmente ordenados con $l(P) \geq 2$ y se busquen condiciones bajo las que el par $(N, Co(P))$ constituya un sistema de partición. Para ello, se introduce el concepto de conjunto ordenado *completamente coherente* a partir de la definición de conjunto ordenado *coherente* dada por Birkoff y Bennett en [10].

Un conjunto parcialmente ordenado $P = (N, \leq)$ es *coherente* si es conexo y ningún elemento maximal de P cubre a ningún elemento minimal de P.

Por ejemplo, el conjunto parcialmente ordenado del Ejemplo 4.1.1 (Figura 4.1) no es *coherente* ya que no es conexo y, además, el elemento maximal 4 cubre al elemento minimal 3. El conjunto parcialmente ordenado considerado en el Ejemplo 4.1.3 (Figura 4.2) es *coherente*. Otras situaciones se contemplan a continuación:



NO COHERENTE (no es conexo)

NO COHERENTE NO COHERENTE (maximales cubren a minimales)

FIGURA 4.4

Definición 4.2.1 *Un conjunto parcialmente ordenado P, con $l(P) \geq 2$, es completamente coherente si cualquier subconjunto parcialmente ordenado inducido por P, P' con $l(P') \geq 2$, es coherente.*

En las siguientes figuras se aclara este concepto. En la Figura 4.5 se presentan los diagramas de conjuntos parcialmente ordenados *coherentes* que no son *completamente coherentes*. En la Figura 4.6 se dan ejemplos de conjuntos parcialmente ordenados que son *completamente coherentes*.

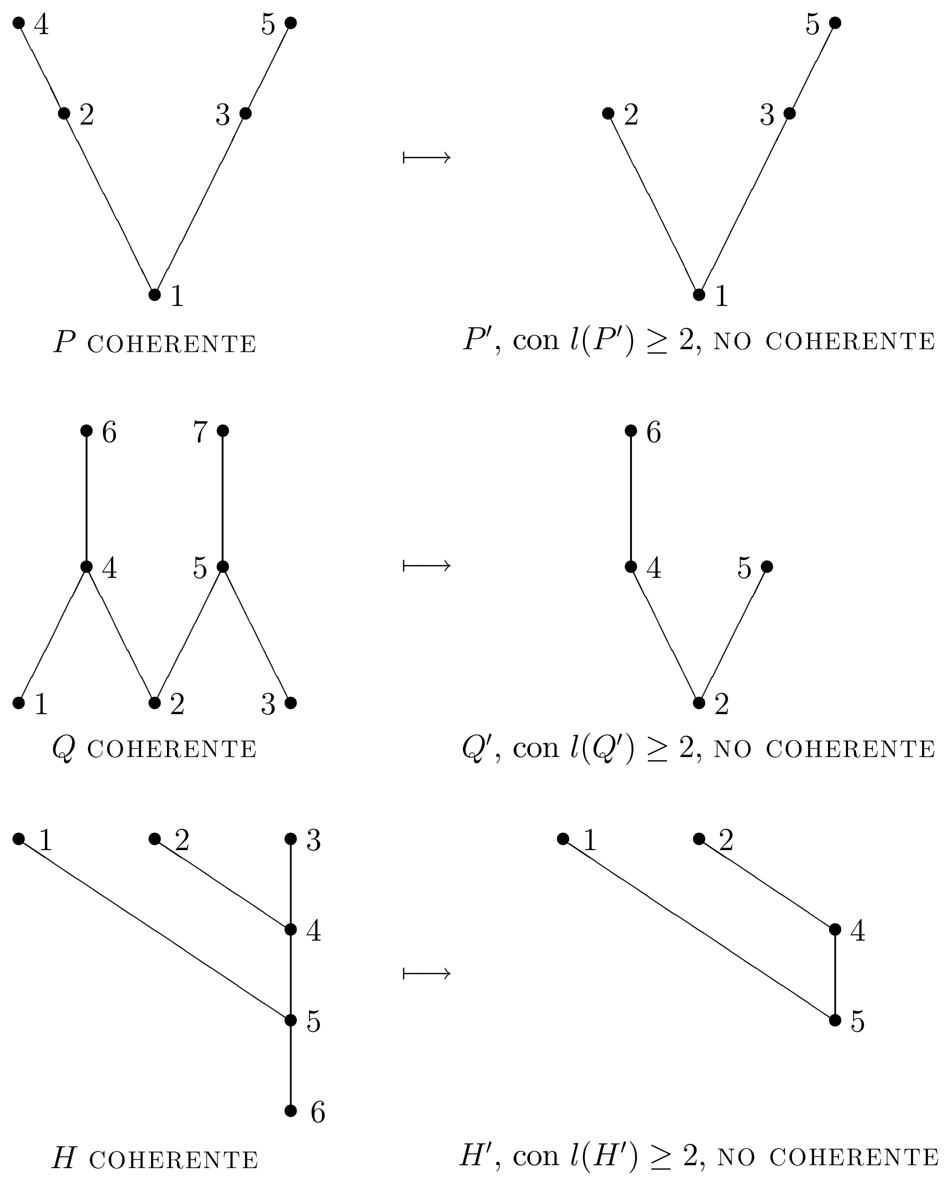
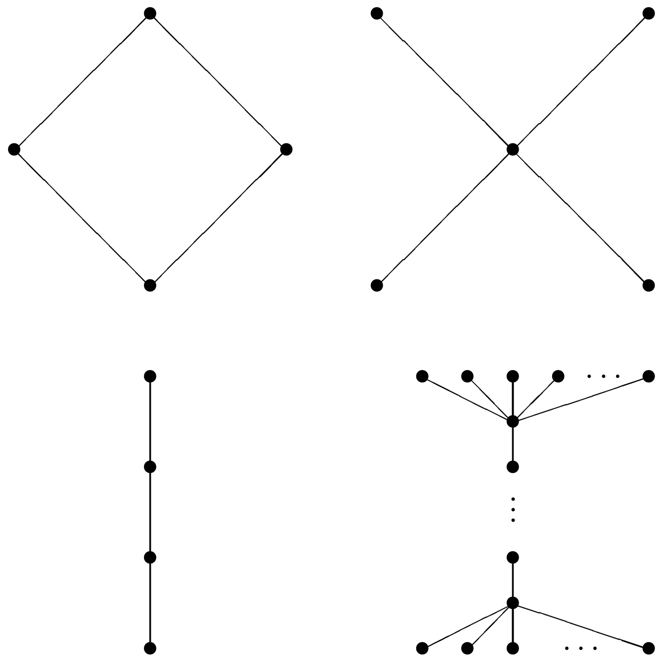

P COHERENTE
P', con $l(P') \geq 2$, NO COHERENTE
Q COHERENTE
Q', con $l(Q') \geq 2$, NO COHERENTE
H COHERENTE
H', con $l(H') \geq 2$, NO COHERENTE

FIGURA 4.5



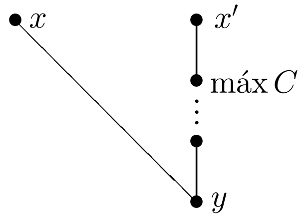
CONJUNTOS ORDENADOS COMPLETAMENTE COHERENTES

FIGURA 4.6

Nótese que los conjuntos parcialmente ordenados y completamente coherentes de la Figura 4.6, salvo el primero de ellos, verifican que $P \setminus ex(P)$ es una cadena. Esta propiedad tendrá una importancia fundamental para que el par $(N, Co(P))$ sea un sistema de partición.

Proposición 4.2.2 *Sea $P = (N, \leq)$ un conjunto finito parcialmente ordenado y completamente coherente, tal que $P \setminus ex(P)$ es una cadena C. Entonces, todo elemento maximal de P cubre al máximo de la cadena C y todo elemento minimal de P está cubierto por el elemento mínimo de C.*

Demostración: Si P *coherente*, es conexo y sus elementos maximales no cubren a ningún minimal. Por lo tanto, si x es maximal, existe $y \in P$ tal que $x \succ y$ donde $y \notin ex(P)$ porque el conjunto $ex(P)$ es la unión de los elementos maximales y minimales. Entonces, existe $y \in C$ tal que $y \leq \max C$.



Si $y \neq \max C$, como $\max C$ no es maximal en P, existe $x' \succ \max C$. El subconjunto parcialmente ordenado inducido, P', constituido por los elementos $\{y, \max C, x, x'\}$ verifica que $l(P') = 2$ y no es coherente, en contra de la hipótesis. En consecuencia, $y = \max C$.

El razonamiento para un elemento minimal es dual del anterior. $\square$

Proposición 4.2.3 *Sea $P = (N, \leq)$ un conjunto finito parcialmente ordenado y completamente coherente, tal que $P \setminus ex(P)$ es una cadena C. Entonces, $A \in Co(P)$, $B \in Co(P)$ y $A \cap B \neq \emptyset$ implican que $A \cup B \in Co(P)$.*

Demostración: El conjunto $A \cup B$ es convexo si dados $a \in A \cup B$, $b \in A \cup B$ con $a \leq b$, entonces $[a, b] \subseteq A \cup B$. El conjunto $A \cup B$ es unión disjunta de $A \setminus B$, $A \cap B$ y $B \setminus A$; luego, de las diferentes posibilidades que se pueden plantear para los elementos a y b, sólo hay que analizar dos de ellas: $a \in A \setminus B$ y $b \in B \setminus A$, o bien $a \in B \setminus A$ y $b \in A \setminus B$. Además, utilizando la dualidad ($Co(P) \simeq Co(P^*)$), es suficiente analizar una de las dos situaciones. En consecuencia, sea $a \in A \setminus B$, $b \in B \setminus A$ con $a < b$.

Hay que probar que $[a, b] \subseteq A \cup B$ y, por hipótesis, $A \cap B \neq \emptyset$. Si existe un elemento $d \in A \cap B$ tal que $d \in [a, b]$, se tiene que:

$$[a, b] = [a, d] \cup [d, b] \subseteq A \cup B,$$

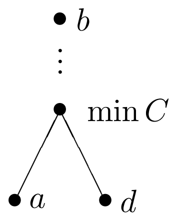
ya que los intervalos de P son siempre cadenas ($P \setminus ex(P) = C$), $\{a, d\} \subseteq A$, $\{d, b\} \subseteq B$ y $A, B \in Co(P)$.

En el caso en que cualquier $d \in A \cap B$ no pertenezca al intervalo $[a, b]$, se presentan cuatro posibilidades: 1) $d < a$, 2) $b < d$, 3) $\{a, d\}$ es una anticadena y 4) $\{b, d\}$ es una anticadena.

Se va analizar cada una de ellas:

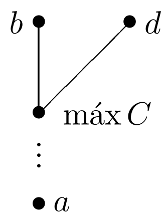
(1) Si $d < a < b$, entonces $[d, b] \subseteq B$. Luego $a \in B$, en contra de ser $a \in A \setminus B$.
(2) Si $a < b < d$, entonces $[a, d] \subseteq A$. Por tanto, resulta que $b \in A$ lo cual está en contradicción con ser $b \in B \setminus A$.

(3) Si $\{a, d\}$ es una anticadena, entonces a y d son elementos minimales (a no es maximal debido a que $a < b$ y las únicas anticadenas en P están contenidas en los elementos maximales de P o en los elementos minimales).



La Proposición 4.2.2 implica que el elemento mínimo de la cadena C, $\min C$ cubre a los elementos a y d. Entonces $d \prec \min C \leq b$ y $[d, b] \subseteq B$ ya que B es convexo y $\{d, b\} \subseteq B$. Así,

$$[a, b] = \{a\} \cup [\min C, b] \subseteq \{a\} \cup [d, b] \subseteq A \cup B.$$



(4) Utilizando un razonamiento análogo al anterior, si $\{b, d\}$ es una anticadena, ambos son maximales y se deduce que $d \succ \max C \geq a$. Entonces, $[a, d] \subseteq A$ y

$$[a, b] = [a, \max C] \cup \{b\} \subseteq A \cup B.$$

$\square$

En la Proposición anterior se establecen condiciones suficientes para que el par $(N, Co(P))$ sea un sistema de partición. En el siguiente teorema, se prueba que son también condiciones necesarias.

Teorema 4.2.4 *Sea $P = (N, \leq)$ un conjunto finito parcialmente ordenado. El par $(N, Co(P))$ es un sistema de partición si y sólo si P es completamente coherente y $P \setminus ex(P) = C$ es una cadena.*

Demostración: Debido a la Proposición anterior, basta demostrar que si $(N, Co(P))$ es un sistema de partición, entonces P es completamente coherente y $P \setminus ex(P) = C$.

Si $P \setminus ex(P) \neq C$, existen $a, b \in P \setminus ex(P)$ tal que $\{a, b\}$ es una anticadena. Como $\{a, b\} \not\subseteq ex(P)$, considérense los conjuntos

$$m(a) = \{m \in P \mid m \prec a\}, \quad M(a) = \{m' \in P \mid a \prec m'\},$$

y, análogamente, $m(b)$ y $M(b)$. Evidentemente, son conjuntos no vacíos y, es fácil ver que $m(a) \cap M(b) = m(b) \cap M(a) = \emptyset$. Sin embargo, $m(a) \cap m(b)$ y $M(a) \cap M(b)$ pueden tener intersección no vacía. De ahí, se plantean las siguientes posibilidades:

(1) $m(a) \cap m(b) \neq \emptyset$

(2) $M(a) \cap M(b) \neq \emptyset$

(3) $m(a) \cap m(b) = M(a) \cap M(b) = \emptyset$

Utilizando la dualidad $Co(P) \simeq Co(P^*)$, es suficiente analizar los casos (1) y (3).
(1) Sean $m \in m(a) \cap m(b)$, $m' \in M(a)$. Si $b \not\leq m'$ (Figura 4.7), el conjunto $\{m, b, m'\} \notin Co(P)$ y sus convexos maximales $\{\{b, m'\}, \{m, b\}\}$ no forman una partición de él. Si $b \leq m'$ (Figura 4.8), $\{m, a, m'\} \notin Co(P)$ y sus convexos maximales $\{\{a, m'\}, \{m, a\}\}$ tampoco forman una partición de él.

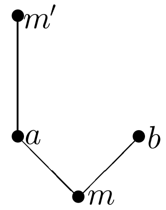


FIGURA 4.7

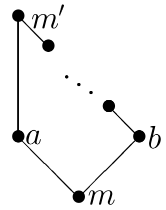


FIGURA 4.8

(3) Supóngase que $m(a) \cap m(b) = M(a) \cap M(b) = \emptyset$ y sean $m \in m(a)$ y $m' \in M(a)$. Si no hay relación entre b y los elementos m, m', se tiene que $\{m, b, m'\} \notin Co(P)$ y sus convexos maximales $\{\{b, m'\}, \{m, b\}\}$ no forman una partición de él (Figura 4.9). Si hay relación es porque $m \leq b$, $b \leq m'$, o ambas. En cualquier situación $m \notin m(b)$ y $m' \notin M(b)$ ya que $m(a) \cap m(b) = M(a) \cap M(b) = \emptyset$. En todos los casos se pueden encontrar ejemplos de conjuntos no convexos para los que sus convexos maximales no forman una partición. En efecto, si $m \leq b$ existe b_1 tal que $m \leq b_1 \leq b$ (Figura 4.10) y, para $\{m, a, b\} \notin Co(P)$ sus convexos maximales $\{\{m, a\}, \{a, b\}\}$ no forman una partición de él. El caso de ser $b \leq m'$ es dual del anterior.

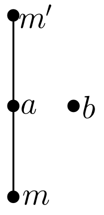


FIGURA 4.9

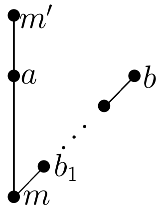


FIGURA 4.10

Así, se ha probado que si $P \backslash ex(P) \neq C$ entonces no se cumple la hipótesis. Ahora, supóngase que P no es completamente coherente. Entonces existe algún subconjunto inducido P', con $l(P') \geq 2$ que no es coherente, luego P' no es conexo o algún elemento maximal de P' cubre a algún elemento minimal de P'.

Si P' no es conexo, existen al menos dos componentes conexas C_1, C_2 y alguna de ellas debe contener una cadena de longitud igual o superior a dos. Sea $l(C_1) \geq 2$. Al considerar el primer y último elemento de la cadena maximal de C_1, que se denotan por $\{p, u\}$, junto con cualquier $a \in C_2$, se tiene para el conjunto $\{p, u, a\}$ una situación análoga a la del subconjunto parcialmente ordenado de la Figura 4.9, con lo que se obtiene una contradicción.

Si P' es conexo pero algún elemento maximal cubre a algún elemento minimal, existen m y m' (minimal y maximal en P') tal que $m \prec m'$. Ahora bien, que m' cubra a m en el subconjunto parcialmente ordenado P' no implica que lo haga en P. Por lo tanto, hay que plantearse dos posibilidades:

(1) $m \prec m'$ en P ($\{m, m'\} \in Co(P)$).

(2) $m \not\prec m'$ en P ($\{m, m'\} \notin Co(P)$).

En (1), considérese el conjunto $\{p, u, m, m'\}$ donde p y u son el primer y último elemento de una cadena maximal del subconjunto parcialmente ordenado P' ($l(P') \geq 2$). Como p y u son elementos extremales en P', surgen las tres situaciones contempladas en las Figuras 4.11, 4.12 y 4.13. En ellas, $\{p, u, m, m'\} \notin Co(P)$ y sus convexos maximales no forman una partición de él. (Nótese que en la situación dibujada en la Figura 4.13 no es conocida la relación existente entre los elementos p y m', así como entre m y u).

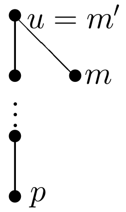


Figura 4.11

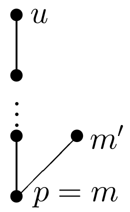


Figura 4.12

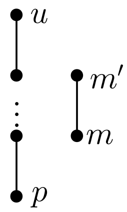


Figura 4.13

En (2), si $m \not\prec m'$ existe $p_1 \in P \setminus P'$ tal que $m < p_1 < m'$. Sean p y u el primer y último elemento de una cadena maximal del subconjunto parcialmente ordenado P'. Entonces, existe $u_1 \in P'$ tal que $p < u_1 < u$ ($l(P') \geq 2$). Evidentemente, no puede ocurrir que $u = m'$ y $p = m$, ya que entonces $m \not\prec m'$ en P'. Por tanto, habrá que considerar los casos $u \neq m'$ y $p \neq m$. Por dualidad, es suficiente estudiar uno de los dos. Si $u \neq m'$, las situaciones que surgen (dibujadas en las Figuras 4.14, 4.15 y 4.16) son debidas a que $\{u_1, p_1\}$ sea una anticadena o no.

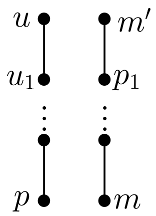


Figura 4.14

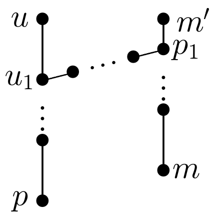


Figura 4.15

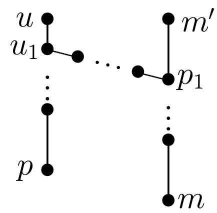


Figura 4.16

Si $\{u_1, p_1\}$ es una anticadena se llega a la contradicción de ser $P \setminus ex(P) \neq C$. Si $u_1 < p_1$ o $p_1 < u_1$, se considerarían los conjuntos $\{u, u_1, m'\} \notin Co(P)$, $\{u, p_1, m'\} \notin Co(P)$. Para ambos, sus convexos maximales no constituyen una partición de ellos. $\square$

Dado que $(N, Co(P))$ es una geometría convexa, la siguiente caracterización es consecuencia del Teorema 4.2.4

Corolario 4.2.5 *$(N, Co(P))$ es una geometría convexa de partición si y sólo si $P = (N, \leq)$ es completamente coherente y $P \setminus ex(P)$ es una cadena.*

Capítulo 5

Aplicaciones

En este capítulo se aplicarán conceptos y resultados obtenidos en capítulos precedentes para evaluar la distribución del poder de las naciones de la Unión Europea y de grupos parlamentarios, en algunos contextos concretos. Para ello, se implementarán algunos algoritmos con el programa de cálculo simbólico *Mathematica* de Wolfram [73] y se utilizarán los *packages DiscreteMathCombinatorica* y *Cooperat'Cooperat'* creados por Skiena [61] y Carter [18] respectivamente.

5.1 Índices de poder en juegos de votación ponderada

El modelo para asignar índices o cuotas de poder a los partidos, grupos parlamentarios o naciones está basado en los denominados *juegos de votación ponderada* [14]. Estos permiten asignar a cada partido un *índice* o *cuota de poder* que mide su capacidad para lograr coaliciones que superen la mayoría absoluta o formen una coalición ganadora.

Un juego de votación ponderada se define en un conjunto de jugadores

$N = \{1, 2, \ldots, n\}$ y cada jugador, que puede ser un grupo político o una nación, tiene un número de votos que se denota por $w_1, w_2, \ldots, w_n$ ($w_i > 0$, $\forall i \in N$). Para cada coalición de jugadores $S \subseteq N$, los votos que reune son la suma de los que tienen sus componentes

$$w(S) = \sum_{i \in S} w_i.$$

Así, la función característica asociada a un juego de votación ponderada queda determinada de la siguiente forma: fijado un número $q > \frac{1}{2}w(N)$, se define

$$v \; : \; 2^N \longrightarrow \mathbb{R}, \quad v(S) = \begin{cases} 1, & \text{si } w(S) \geq q \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

A la vista de la definición, un juego de votación ponderada se representa, con los datos

$$v = [q; \; w_1, w_2, \ldots, w_n],$$

y es inmediato probar que es simple y propio. En efecto, es monótono ya que

$$S \subseteq T \subseteq N \;\Rightarrow\; w(S) = \sum_{i \in S} w_i \leq \sum_{i \in T} w_i = w(T) \;\Rightarrow\; v(S) \leq v(T);$$

y, además, es propio ya que si existieran dos coaliciones ganadoras disjuntas $S, T \subseteq N$, se tendría

$$\sum_{i \in S} w_i \geq q, \; \sum_{i \in T} w_i \geq q \;\Longrightarrow\; \sum_{i \in S \cup T} w_i \geq 2q > w(N),$$

lo cual es contradictorio.

El hecho de que sea simple y propio, permite afirmar que es superaditivo. Además, el valor de Shapley es

$$\begin{aligned} \Phi_i(v) &= \sum_{i \in S \subseteq N} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}[v(S) - v(S \setminus \{i\})] \\ &= \sum_{\{S \in \mathcal{MW} \,|\, i \in S\}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}, \end{aligned}$$

valor que se denomina *índice de poder de Shapley–Shubik* [57]. Este índice puede interpretarse como la contribución marginal esperada de un jugador que convierte una coalición perdedora en ganadora, y su fórmula expresa una suma extendida a todas las coaliciones ganadoras minimales a las que pertenezca el jugador.

Si se considera una terna $(N, \mathcal{F}, v)$ en la que el par $(N, \mathcal{F})$ sea un sistema de partición y (N, v) un juego de votación ponderada, resulta ser

$$\tilde{v}^{\mathcal{F}}(S) = v^{\mathcal{F}}(S) = \text{máx}\{v(S_i) \mid S_i \in \Pi_S\}, \ \forall S \subseteq N,$$

y son de aplicación inmediata los resultados correspondientes a la Proposición 3.4.1 y el Corolario 2.4.2., así como la Proposición 2.4.3 si el par $(N, \mathcal{F})$ fuese, además, una geometría convexa.

5.2 El poder de las naciones en la Unión Europea

En el modelo que se plantea, se supone que el *poder* reside en el Consejo de la Unión Europea. Cada nación es un jugador que puede unirse a otros para formar coaliciones y tiene el número de votos que le asigna el Tratado de la Unión Europea. También, debido a la decisión del Consejo de 29 de Marzo de 1994 sobre la adopción de decisiones por el Consejo por mayoría cualificada (Diario Oficial de la Comunidades Europeas 94/C, 105/1), se toman las mayorías cualificadas de 62 y 65 votos, de un total de 87, como aquéllas que sirven en la actualidad para contraer acuerdos.

No obstante, dado que está abierta la discusión sobre cual debe ser la exigencia de mayoría cualificada para la obtención de compromisos, se van a obtener índices de poder coalicional utilizando reglas de mayoría cualificada que exijan desde 61 a 68 votos sobre el total de 87 votos.

Por tanto, teniendo en cuenta los datos de la Tabla 5.1, el método de votación del Consejo Europeo se modela mediante el juego (N, v) en el que

$$\begin{aligned} N = \; & \{\text{Alemania, Reino Unido, Francia, Italia, España, Holanda,} \\ & \text{Grecia, Bélgica, Portugal, Suecia, Austria, Dinamarca,} \\ & \text{Finlandia, Irlanda, Luxemburgo}\}, \end{aligned}$$

$$v = [q\ ;\ 10, 10, 10, 10, 8, 5, 5, 5, 5, 4, 4, 3, 3, 3, 2], \quad 61 \leq q \leq 68.$$

EL CONSEJO DE EUROPA				
	P.	V.	I.P.	I.V.
Alemania	80.6	10	.2189	.1149
Reino Unido	57.9	10	.1573	.1149
Francia	57.5	10	.1562	.1149
Italia	56.9	10	.1545	.1149
España	39.1	8	.1062	.09195
Holanda	15.5	5	.0421	.05747
Grecia	10.3	5	.02797	.05747
Bélgica	10.0	5	.02716	.05747
Portugal	9.8	5	.02662	.05747
Suecia	8.6	4	.02336	.04598
Austria	7.9	4	.02146	.04598
Dinamarca	5.2	3	.01412	.03448
Finlandia	5.3	3	.01358	.03448
Irlanda	3.5	3	.009506	.03448
Luxemburgo	0.4	2	.001086	.02299
	368.2	87		

P.: Población en millones de habitantes; V.: Número de votos en el Consejo Europeo; I.P.: Índice de Población; I.V.: Índice de Votos.

TABLA 5.1

El juego definido en el programa *Mathematica* es el que sigue

```
JuegoUE15[n_]:= ( Clear[T,x,y,v]; T=Range[15];
x[i_Integer/; 1<=i && i<=4]:=10; x[5]:=8;
x[i_Integer/; 6<=i && i<=9]:=5; x[10]:=4; x[11]:=4;
x[12]:=3; x[13]:=3; x[14]:=3; x[15]:=2;
y[S_List]:= Apply[Plus, x/@S]; v[{}]:=0;
v[S_/; y[S]>=n]:=1; v[S_/; y[S]<n]:=0; ),
```

y, utilizando la función ShapleyValue1, incorporada en el *package Cooperat'Cooperat'*, se obtiene el índice de poder de Shapley–Shubik de cada una de las naciones del Consejo de Europa para las diferentes mayorías cualificadas (Tabla 5.2).

Los índices resultantes permiten obtener unas primeras conclusiones:

1. Alemania, Reino Unido, Francia e Italia tienen un índice de votos en el Consejo Europeo que es claramente inferior a sus respectivos índices de población. Ello se traduce, de igual forma, en relación a sus índices de poder aunque éstos son ligeramente superiores a los correspondientes índices de votación.

2. España tiene un índice de votación en el Consejo Europeo bastante equilibrado con respecto a su índice de población ya que, junto con Holanda, su número de votos es el más proporcional a su población. Resalta su situación al ser el país más equilibrado en la relación población/votos/poder, y existen mayorías cualificadas que le permitirían tener índices de poder superiores a su índice de votación.

3. El resto de paises no contemplados en los dos apartados anteriores tienen un índice de poder y de votación superiores a sus correspondientes índices de población.

ÍNDICES DE PODER EN EL CONSEJO DE EUROPA								
$q :=$	61	62	63	64	65	66	67	68
Aleman.	.119	.117	.12	.119	.121	.118	.115	.124
Reino U.	.119	.117	.12	.119	.121	.118	.115	.124
Francia	.119	.117	.12	.119	.121	.118	.115	.124
Italia	.119	.117	.12	.119	.121	.118	.115	.124
España	.0917	.0955	.0924	.0884	.0936	.0921	.0981	.0911
Holanda	.0558	.0552	.0566	.0556	.0566	.0558	.0542	.055
Grecia	.0558	.0552	.0566	.0556	.0566	.0558	.0542	.055
Bélgica	.0558	.0552	.0566	.0556	.0566	.0558	.0542	.055
Portugal	.0558	.0552	.0566	.0556	.0566	.0558	.0542	.055
Suecia	.0464	.0454	.0402	.049	.0398	.0472	.0463	.0374
Austria	.0464	.0454	.0402	.049	.0398	.0472	.0463	.0374
Dinam.	.0313	.0353	.0331	.0306	.0332	.0316	.0373	.0321
Finlandia	.0313	.0353	.0331	.0306	.0332	.0316	.0373	.0321
Irlanda	.0313	.0353	.0331	.0306	.0332	.0316	.0373	.0321
Luxemb.	.0218	.0207	.0226	.0237	.0185	.022	.0215	.0237

TABLA 5.2

Las conclusiones expuestas pueden verse con mayor claridad en el gráfico tridimensional de la Figura 5.3 en el que se comparan, entre sí y para cada una de las quince naciones, los índices de población, votos y poder para las diferentes mayorías cualificadas.

FIGURA 5.3

Los cálculos de índices de poder de las naciones en el Consejo de Europa, realizados para diferentes mayorías cualificadas, presuponen que es factible la formación de cualquier coalición. Sin embargo, es razonable admitir que existirán coaliciones factibles y otras que no lo serán, y que las naciones se agruparán en bloques siguiendo intereses políticos comunes, áreas de influencia económica, etc.

Evidentemente, la formación de bloques puede ser muy variada y abordar todas las posibilidades escapa de las intenciones de esta aplicación. Aquí, se va a exponer el método que se aplicaría para determinar los índices de poder de las naciones, ejemplificándolo con una situación derivada de modelar las relaciones bilaterales mediante un grafo constituido por varios bloques de naciones (ver Figura 5.4). En los cálculos que se efectuen, se utilizarán reglas de mayoría cualificada que exigen al menos 62 y 65 votos de un total de 87.

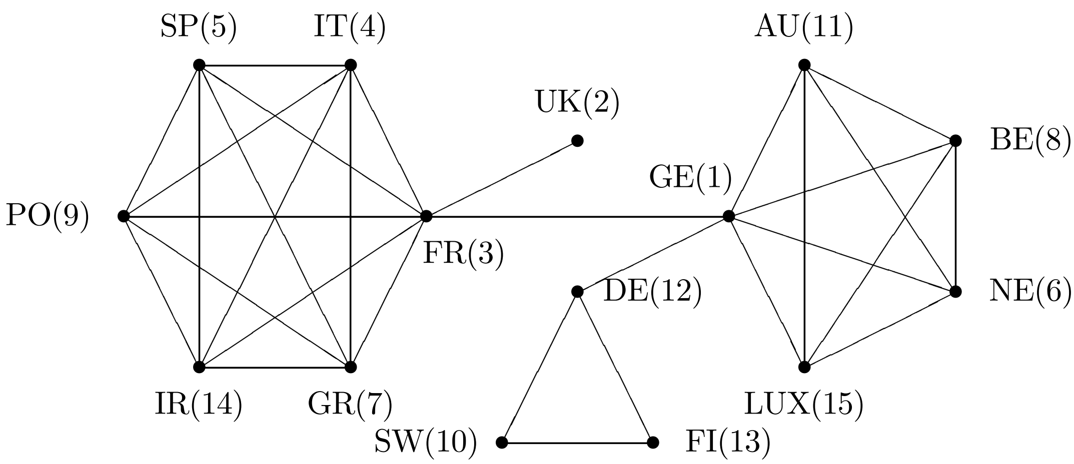


FIGURA 5.4

Para calcular el $\mathcal{F}$–valor de Shapley se utilizarán dos métodos. El primero es un método indirecto que consiste en calcular el correspondiente $\mathcal{F}$–juego restringido y aplicarle la función potencial de Hart y Mas–Colell a dicho juego. El segundo método consiste en aplicar el Teorema 3.3.5, calculando directamente los potenciales restringidos por el sistema de partición. En este segundo método, habrá que definir varias funciones que permitan calcular las $\mathcal{F}$–componentes de cada coalición.

Así, para calcular, utilizando el primer método, el *valor convexo de Shapley*, se determina el $\mathcal{F}$–restringido de la siguiente forma

```
grafo1=FromUnorderedPairs[{{1,3}, {1,6},{1,8},{1,11},{1,12},
{1,15},{2,3},{3,4},{3,5},{3,7},{3,9},{3,14}, {4,5},{4,7},{4,9},
{4,14},{5,7},{5,9},{5,14},{6,8},{6,11}, {6,15},{7,9},{7,14},
{8,11},{8,15},{9,14},{10,12}, {10,13},{11,15},{12,13}}];
```

```
Clear[conexas];
```

```
conexas=Select[Rest[Subsets[Range[V[grafo1 ]]]],
(ConnectedQ[InduceSubgraph[grafo1,#]]) &];
```

```
subconexo[S_ List]:=Select[conexas, (Intersection[S,#]==#) &]
```

```
JuegoConvexoUE15[n_ ]:= ( Clear[T,x,y,v,valor]; T=Range[15];
x[i_Integer/; 1<=i && i<=4]:=10; x[5]:=8;
x[i_Integer/; 6<=i && i<=9]:=5; x[10]:=4; x[11]:=4;
x[12]:=3; x[13]:=3; x[14]:=3; x[15]:=2;
y[S_List]:= Plus @@ x/@S; valor[{}]:=0;
valor[S_/; y[S]>=n]:=1; valor[S_/; y[S]<n]:=0;
v[S_List]:=Max [(valor[#]) & /@ subconexo[S]];)
```

y se calcula el valor de Shapley —con la función potencial de Hart y Mas–Colell— usando la función ShapleyValue2 (incorporada en el *package Cooperat' Cooperat'*). Así, se obtiene el *valor convexo de Shapley* junto con el tiempo de cálculo.

```
Timing[ShapleyValue2[JuegoConvexoUE15[62]]],
Timing[ShapleyValue2[JuegoConvexoUE15[65]]].
```

Si se utiliza el segundo de los métodos descritos, las funciones necesarias para su cálculo se definen a continuación

```
F:=Union[conexas,{{}}]; OneCom[S_List, F_List]:=
Last[Sort[Select[Subsets[S], (MemberQ[F,#])&],
(Apply[Length, {#1}]<=Apply[Length, {#2}])&]];

Component[S_List, F_List]:=Module[
{temp=Sort[S], cotemp, comps={}},
While[temp != {}, cotemp=OneCom[temp,F];
AppendTo[comps,cotemp];
temp=Sort[Complement[temp,cotemp]]]; Sort[comps]]

ConvexShapley2[game_Null, S_List:T]:=Module[{va},
va=q2[T]-(q2[DeleteCases[T,#]]& /@ S);
(* q2[#]=. & /@ Rest[Coalitions]; *)
Return[va]]

ConvexShapley2[game_]:= ConvexShapley2[game,T]
ConvexShapley2[]:=ConvexShapley2[Null,T]
ConvexShapley2[game_:Null, i_?AtomQ]:=
ConvexShapley2[game,{i}]

q2[{i_}]:=q2[{i}]=v[{i}];
q2[S_]:=q2[S]=If[MemberQ[F,S],
(v[S]+ Apply[Plus,
q2[Complement[S,{#}]]& /@ S])/Lenght[S],
Apply[Plus, q2[#]& /@ Component[S,F]]]

Timing[ConvexShapley2[JuegoUE15[62]]],
Timing[ConvexShapley2[JuegoUE15[65]]].
```

Los resultados obtenidos se exponen en la Tabla 5.5 y, junto con ello, se comparan los resultados en los diagramas tridimensionales mostrados en la Figura 5.6 y 5.7.

ÍNDICES DE PODER EN EL CONSEJO DE EUROPA

	$q = 62$		$q = 65$	
	I.S.	I.C.	I.S.	I.C.
Alemania	0.117	0.2925	0.121	0.2653
Reino Unido	0.117	0.06284	0.121	0.07274
Francia	0.117	0.2925	0.121	0.2653
Italia	0.117	0.06284	0.121	0.07274
España	0.0955	0.05117	0.0936	0.05675
Holanda	0.0552	0.02824	0.0566	0.03276
Grecia	0.0552	0.02824	0.0566	0.03276
Bélgica	0.0552	0.02824	0.0566	0.03276
Portugal	0.0552	0.02824	0.0566	0.03276
Suecia	0.0454	0.01491	0.0398	0.0155
Austria	0.0454	0.02466	0.0398	0.02288
Dinamarca	0.0353	0.04499	0.0332	0.05726
Finlandia	0.0353	0.01106	0.0332	0.01217
Irlanda	0.0353	0.001829	0.0332	0.01955
Luxemburgo	0.0207	0.01134	0.0185	0.00868

I.S.: Índice de Shapley;

I.C.: Índice Convexo de Shapley.

TABLA 5.5

FIGURA 5.6

FIGURA 5.7

5.3 Coaliciones convexas en el Congreso

En esta sección, tal como indica su título, se estudian los índices de poder de los partidos políticos en el Congreso de los Diputados de España, elegido el 3 de Marzo de 1996, y en el Parlamento de Cataluña, en la legislatura iniciada en 1995.

En el estudio del poder en el Congreso de los Diputados de España, se calcula, en primer lugar, el índice de poder coalicional de Shapley–Shubik, lo cual implica aceptar que no existe restricción alguna en la formación de coaliciones. Para ello, se considera el siguiente conjunto de jugadores

$$N = \{\mathrm{PP}(1), \mathrm{PSOE}(2), \mathrm{IU}(3), \mathrm{CiU}(4), \mathrm{PNV}(5), \mathrm{CC}(6), \mathrm{BNG}(7), \mathrm{HB}(8),$$

$$\mathrm{ERC}(9), \mathrm{EA}(10), \mathrm{UV}(11)\},$$

y el juego queda representado por el siguiente esquema de votación

$$[176;\ 156, 141, 21, 16, 5, 4, 2, 2, 1, 1, 1].$$

El cálculo efectivo se realiza utilizando una técnica similar a la empleada en la sección anterior referente a la Unión Europea. El índice de poder de cada grupo parlamentario es

$$\{\ .452,\ .184,\ .184,\ .119,\ .017,\ .017,\ .008,\ .008,\ .004,\ .004,\ .004\ \}.$$

Ahora bien, no es lógico aceptar que sea válida cualquier coalición entre los diferentes partidos políticos ya que, en la realidad, existen preferencias o vetos a la cooperación bilateral. Entonces, es obvio que surgen sistemas de coaliciones factibles de los que, en esta aplicación, se considerarán dos de ellos. Uno, derivado de modelar las preferencias mediante una relación de orden lineal denominada *policy order* por Axelrod [4] y Einy [24], y otro que aparece de modelar las relaciones bilaterales entre los grupos mediante un grafo constituido por dos bloques completos.

En ambos casos, para calcular el $\mathcal{F}$–valor de Shapley se utilizarán los dos métodos descritos en la sección anterior. Se recuerda que el primero es un método indirecto que consiste en calcular el correspondiente $\mathcal{F}$–juego restringido y aplicarle la función potencial de Hart y Mas–Colell a dicho juego. El segundo método consiste en aplicar el Teorema 3.3.5, calculando directamente los potenciales restringidos por el sistema de partición. En este segundo método, habrá que definir las funciones que permitan calcular las $\mathcal{F}$–componentes de cada coalición.

Tal como se ha indicado, en el primer modelo se considera el orden político unidimensional

HB—BNG—ERC—EA—IU—PSOE—PNV—CiU—PP—CC—UV,

que responde a una relación de orden izquierda–derecha y, en dicha relación de orden, la geometría convexa de partición $Co(P)$.

Para calcular, por el primer método descrito en el parágrafo anterior, el *valor convexo de Shapley*, se determina el $Co(P)$–juego restringido como sigue

```
grafo1=FromUnorderedPairs[{{8,7}, {7,9},{9,10},{10,3},{3,2},
{2,5},{5,4},{4,1},{1,6},{6,11}}];

Clear[conexas];

conexas=Select[Rest[Subsets[Range[V[grafo1 ]]]],
(ConnectedQ[InduceSubgraph[grafo1,#]]) &];

subconexo[S_ List]:=Select[conexas, (Intersection[S,#]==#) &]

JuegoConvexoESPA[n_ ]:= ( Clear[T,x,y,v,valor]; T=Range[11];
x[1]:=156; x[2]:=141; x[3]:=21; x[4]:=16; x[5]:=5;
x[6]:=4; x[7]:=2; x[8]:=2; x[9]:=1; x[10]:=1; x[11]:=1;
y[S_ List]:= Plus @@ x/@S; valor[{}]:=0;
valor[S_ /; y[S]>=n]:=1; valor[S_ /; y[S]<n]:=0;
v[S_ List]:=Max [(valor[#]) & /@ subconexo[S]];)
```

```
Timing[ShapleyValue3[JuegoConvexoESPA[176]]],
```

y se calcula el valor de Shapley —con la función potencial de Hart y Mas–Colell— usando la función ShapleyValue3 (incorporada en el *package Cooperat' Cooperat'*). Así, se obtiene el *valor convexo de Shapley* para la geometría $(N, Co(P))$ junto con el tiempo de cálculo

{ 78.32 Second, {0.217, 0.05, 0.05, 0.467, 0.133, 0.0833, 0, 0, 0, 0, 0} } .

Si se utiliza el segundo de los métodos descritos, las funciones necesarias para su cálculo se definen a continuación

```
JuegoESPA[n_]:= ( Clear[T,x,y,v,valor]; T=Range[11];
x[1]:=156; x[2]:=141; x[3]:=21; x[4]:=16; x[5]:=5;
x[6]:=4; x[7]:=2; x[8]:=2; x[9]:=1; x[10]:=1; x[11]:=1;
y[S_List]:= Apply[Plus, x/@S; v[{}]:=0;
v[S_/; y[S]>=n]:=1; v[S_/; y[S]<n]:=0;)

F:=Union[conexas,{{}}]; OneCom[S_List, F_List]:=
Last[Sort[Select[Subsets[S], (MemberQ[F,#])&],
(Apply[Length, {#1}]<=Apply[Length, {#2}])&]];

Component[S_List, F_List]:=Module[
{temp=Sort[S], cotemp, comps={}},
While[temp != {}, cotemp=OneCom[temp,F];
AppendTo[comps,cotemp];
temp=Sort[Complement[temp,cotemp]]]; Sort[comps]]

ConvexShapley2[game_Null, S_List:T]:=Module[{va},
va=q2[T]-(q2[DeleteCases[T,#]]& /@ S);
(* q2[#]=. & /@ Rest[Coalitions]; *)
Return[va]]

ConvexShapley2[game_]:= ConvexShapley2[game,T]
ConvexShapley2[]:=ConvexShapley2[Null,T]
```

```
ConvexShapley2[game_ :Null, i_ ?AtomQ]:=
ConvexShapley2[game,{i}]

q2[{i_ }]:=q2[{i}]=v[{i}];
q2[S_ ]:=q2[S]=If[MemberQ[F,S],
(v[S]+ Apply[Plus,
q2[Complement[S,{#}]]& /@ S])/Lenght[S],
Apply[Plus, q2[#]& /@ Component[S,F]]]

Timing[ConvexShapley2[JuegoESPA[176]]],
```

obteniendo el mismo resultado con menor tiempo de cálculo

$$\{ \text{ 28.18 Second}, \{0.217,\ 0.05,\ 0.05,\ 0.467,\ 0.133,\ 0.0833,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\} \}.$$

En el segundo modelo que se presenta, se limitará el estudio del poder coalicional a los seis primeros grupos parlamentarios, ya que los resultados anteriores dan un índice de poder nulo al resto de los partidos. Es decir

$$N = \{\mathrm{PP}(1), \mathrm{PSOE}(2), \mathrm{IU}(3), \mathrm{CiU}(4), \mathrm{PNV}(5), \mathrm{CC}(6)\},$$

el juego queda representado por el siguiente esquema de votación

$$[176;\ 156, 141, 21, 16, 5, 4],$$

y se va a calcular el valor convexo de Shapley correspondiente a la terna $(N, \mathcal{F}, v)$, en la que $(N, \mathcal{F})$ es la geometría convexa de partición que resulta de considerar la familia de subgrafos conexos del grafo de relaciones de la Figura 5.8

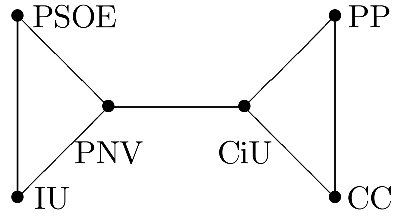


FIGURA 5.8

Utilizando los dos métodos anteriores, resultan los índices de poder convexo que se indican en la Tabla 5.9. Obsérvese que, en este caso particular, el poder convexo respecto a la geometría del grafo bloque formado con los seis primeros partidos, coincide con el poder convexo respecto al modelo correspondiente al *policy order*. También puede notarse que, en ambos modelos estudiados, los partidos nacionalistas aumentan considerablemente su poder (multiplican por diez su porcentaje de votos) a costa de la reducción del poder de PP, PSOE e IU. Ello se explica porque las coaliciones ganadoras minimales convexas son las constituidas por {PP, CiU, CC}, {PP, CiU, PNV} y {PSOE, IU, CiU, PNV}.

CONGRESO DE LOS DIPUTADOS				
Partido	Votos	Escaños	I.S.	I.C.
PP	38.88	44.57	.4667	.2167
PSOE	37.42	40.29	.1833	.0500
IU	10.56	6.00	.1833	.0500
CiU	4.64	4.57	.1333	.4667
PNV	1.29	1.43	.0167	.1333
CC	0.88	1.14	.0167	.0833

I.S.: Índice de poder de Shapley–Shubik;

I.C.: Índice de poder convexo de Shapley.

TABLA 5.9

Por último se presenta, en esta sección, el estudio correspondiente al Parlamento de Cataluña, en la legislatura iniciada en 1995. En este caso, los jugadores son los grupos parlamentarios CiU(1), PSOE(2), PP(3), ERC(4), IC–LV(5), con la mayoría simple $q = 68$. Así, el juego de votación ponderada se representa por $[68\ ;\ 60, 34, 17, 13, 11]$.

La geometría que se analiza es el *order convex* correspondiente al orden izquierda–derecha

ERC———IC–LV——— PSOE———CiU———PP

Los resultados obtenidos son

ShapleyValue3[Catalan] $=\{\ 0.6,\ 0.1,\ 0.1,\ 0.1,\ 0.1\ \}$,
ShapleyValue3[JuegoConvexo] $=\{\ 0.666,\ 0.166,\ 0.166,\ 0,\ 0\ \}$.

5.4 Cooperación y conflicto en el Parlamento de Andalucía

En las secciones anteriores se han estudiado modelos basados en la teoría de juegos cooperativos para medir el poder de las naciones o de los partidos políticos. En esta sección se seguirá en la misma linea, analizando las diferentes legislaturas del Parlamento de Andalucía, aunque el modelo de cooperación parcial se completará —para la legislatura iniciada en 1994— con un modelo competitivo, en el que las alianzas dependen de decisiones estratégicas e ideológicas de los partidos con grupo parlamentario en el Parlamento de Andalucía.

En las legislaturas que se inician en 1982, 1986 y 1990, con el juego de mayoría absoluta, el PSOE tiene todo el poder en Andalucía y no existe juego cooperativo de coaliciones.

En el Parlamento de Andalucía, elegido en 1994, los jugadores son los grupos parlamentarios

$$N = \{\text{Poder Andaluz, IU–LV–CA, PP–Andalucía, PSOE–Andalucía}\}\,,$$

y el juego del poder queda definido por $[55;\ 3,\ 20,\ 41,\ 45]$.

En la Tabla 5.10 se presentan los índices de poder de Shapley–Shubik de los partidos andaluces en el juego de votación definido anteriormente y se comparan estos índices de poder (multiplicados por cien) con sus porcentajes de votos y escaños.

EL PARLAMENTO DE ANDALUCÍA			
	Votos	Escaños	Poder
PSOE de Andalucía	38,56	41,28	33,33
PP de Andalucía	34,47	37,61	33,33
IU–LV–CA	19,17	18,35	33,33
Poder Andaluz	5,80	2,75	0

TABLA 5.10

La situación de igual cuota de poder entre los tres primeros partidos del Parlamento de Andalucía deriva del modelo cooperativo en el que todas las coaliciones son posibles ante cualquier decisión. Es obvio que esta hipótesis simplifica la realidad ya que algunas coaliciones son más viables que otras si se trata de apoyar o controlar la acción del Gobierno.

Las estrategias competitivas de los tres partidos con poder en el juego de mayoría absoluta son:

1. El PSOE tiene dos estrategias: lograr el apoyo de IU para gobernar y dialogar con el PP para evitar una coalición de bloqueo entre el PP e IU.

2. El PP tiene una estrategia dominante, controlar la acción del gobierno y sumar a dicho control a IU y al PA. A la vez está abierto al diálogo con el gobierno en temas institucionales.

3. La coalición IU tiene dos estrategias que desarrolla a la vez: apoyar y controlar la acción gubernamental, según el signo de las políticas del ejecutivo.

Estas estrategias de los jugadores originan un *juego competitivo* en el que hay 6 combinaciones estratégicas, que se denominan *escenarios* (Figura 5.12). Cada escenario se representa mediante un grafo en cuyos vértices están los partidos con poder y cada arista que une dos partidos representa la disposición para coaligarse en dicho escenario. Si no hay arista entre dos partidos, entonces la coalición entre ambos no es viable. En todas las combinaciones estratégicas, *se supone que se ha elegido un gobierno en minoría del PSOE* por ser el grupo con mayor número de diputados andaluces y porque el PP e IU no desean formar un gobierno conjunto.

En la página siguiente se representan los seis grafos que modelan los seis escenarios aludidos. Para obtener todos los escenarios posibles se debe añadir el escenario E_0 en el que no hay ninguna relación y el escenario E_7 en el que todos los jugadores se relacionan entre sí formando un grafo completo. Es evidente que el poder coalicional de los tres partidos en el escenario E_0 es 0 y en el escenario E_7 es de 1/3 para cada uno de ellos, ya que se debe corresponder con el índice de poder de Shapley–Shubik.

Para cada uno de los seis escenarios descritos, se calcula el $\mathcal{F}-$ valor de Shapley tomando como sistema de coaliciones factibles el que se deriva de considerar los subgrafos conexos. Es decir, para las diferentes *situaciones de comunicación* planteadas, se determina el *valor de Myerson* (Definición 3.2.2). El poder coalicional de cada grupo parlamentario resulta ser

El Poder Coalicional en Andalucía			
	PSOE	PP	IU
Escenario 1	1/2	0	1/2
Escenario 2	1/2	1/2	0
Escenario 3	4/6	1/6	1/6
Escenario 4	1/6	1/6	4/6
Escenario 5	1/6	4/6	1/6
Escenario 6	0	1/2	1/2

TABLA 5.11

Escenario 1 = Apoyo de IU al gobierno
Escenario 2 = Apoyo del PP al gobierno
Escenario 3 = Apoyo del PP y IU al gobierno
Escenario 4 = Apoyo y control de IU al gobierno
Escenario 5 = Apoyo y control del PP al gobierno
Escenario 6 = Control del PP e IU al gobierno

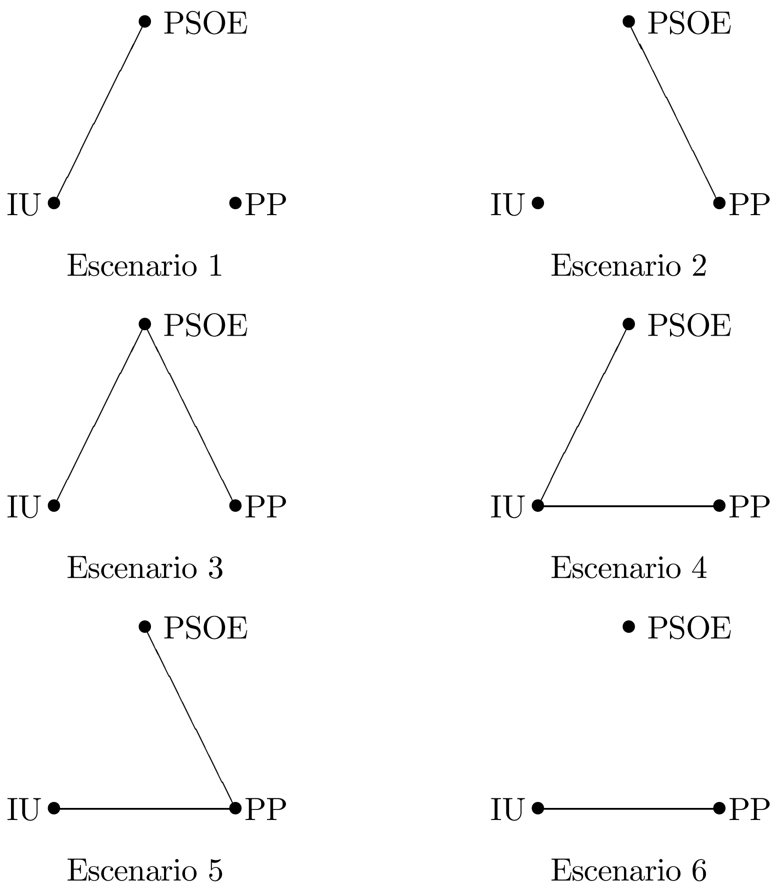


FIGURA 5.12

El juego competitivo entre los tres partidos con poder coalicional en el Parlamento Andaluz es un conflicto para alcanzar un escenario en el que cada partido trata de obtener un poder coalicional máximo. Esta situación se analiza mediante el *Análisis del Conflicto.* Esta técnica de resolución de conflictos ha sido creada por Fang, Hipel y Kilgour en [28], [29] y [39], e incluyen los análisis de estabilidad y equilibrio pioneros de Nash [46] [47].

En el siguiente cuadro se clasifica la técnica de resolución de conflictos junto a otros métodos para tomar decisiones:

		Objetivos	
		Uno	Dos o más
Actores	Uno	*Investigación Operativa*	*Decisión multicriterio*
	Dos o más	*Juegos Cooperativos*	*Análisis del conflicto*

Fang, Hipel y Kilgour, en [28] y [29], proponen el siguiente modelo gráfico para un conflicto. Éste consiste en un conjunto $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ de jugadores, un conjunto $U = \{1, 2, \ldots, u\}$ de escenarios, una familia de grafos dirigidos $D_i = (U, A_i)$ para cada jugador $i \in N$, y una familia de funciones de pago $P_i : U \longrightarrow \mathbb{R},\ \ i \in N$.

En la situación que se está considerando, el juego del poder coalicional se modela considerando a los jugadores $N = \{1, 2, 3\}$, donde 1 representa al PSOE, 2 al PP y 3 a IU. El conjunto U de los escenarios del juego está formado por los ocho grafos etiquetados de tres vértices. Es decir, los seis escenarios E_i definidos y representados en la Figura 5.8, el grafo sin aristas E_0 y el grafo completo E_7.

Las funciones de pago $P_j(E_i),\ 0 \leq i \leq 7,\ 1 \leq j \leq 3$, son los índices de poder coalicional calculados (Tabla 5.7). Además hay que añadir los pagos (0,0,0) y (1/3,1/3,1/3) correspondientes a los escenarios E_0 y E_7 respectivamente. Dado que los índices de poder suman uno en todos los escenarios, excepto en E_0, se tiene

$$\sum_{j=1}^{3} P_j(E_i) = 1, \quad 1 \leq i \leq 7; \quad \sum_{j=1}^{3} P_j(E_0) = 0.$$

El modelo se completa definiendo el conjunto de movimientos que un jugador puede realizar para cambiar (unilateralmente) de escenario y así obtener los grafos dirigidos D_i.

Dado que en el juego, el objetivo es aumentar el poder coalicional, se propone la siguiente definición

Definición 5.4.1 *Un jugador i puede mover unilateralmente del escenario dado por el grafo g a $g + ij$ si los pagos a i y j no decrecen. Es decir, $P_i(g + ij) \geq P_i(g)$ y $P_j(g + ij) \geq P_j(g)$. Un jugador i puede mover de g a $g - ij$ si $P_i(g - ij) \geq P_i(g)$ (porque i no necesita la aprobación de j para romper su acuerdo).*

Dado un escenario g y un jugador i, el conjunto de los escenarios que el jugador puede alcanzar unilateralmente desde g se denota por $S_i(g)$. Si además, i recibe un pago estrictamente mayor, los escenarios de mejora unilateral para i son:

$$S_i^+(g) = \{q \in S_i(g) | P_i(q) > P_i(g)\}.$$

Con las definiciones anteriores, se tiene que:

$$g + ij \in S_i^+(g) \Longleftrightarrow P_i(g + ij) > P_i(g) \quad \text{y} \quad P_j(g + ij) \geq P_j(g),$$

$$g - ij \in S_i^+(g) \Longleftrightarrow P_i(g - ij) > P_i(g).$$

Se introducen dos conceptos de estabilidad y equilibrio para aplicarlos al análisis del juego coalicional.

Definición 5.4.2 *Un escenario $g \in U$ es estable Nash para el jugador i si $S_i^+(g) = \emptyset$.*

Definición 5.4.3 *Un escenario $g \in U$ es sucesionalmente estable para el jugador i si para cualquier $g_1 \in S_i^+(g)$ existe al menos un escenario*

$$g_x \in S_{N-i}^+(g_1) \text{ con } P_i(g_x) \leq P_i(g).$$

Definición 5.4.4 *Un equilibrio de Nash es un escenario que es estable Nash para todos los jugadores. Un equilibrio sucesional es un escenario que es sucesionalmente estable para todos los jugadores.*

Obsérvese que el juego del poder coalicional en el Parlamento de Andalucía tiene índices de poder proporcionales al juego propuesto por Myerson en [45, pág 448].

Teorema 5.4.4 *El único equilibrio de Nash en el juego del poder coalicional es el escenario del grafo completo.*

Demostración: Si el grafo completo E_7 no es un equilibrio de Nash, entonces existen un jugador i y un escenario $g \in S_i^+(E_7)$, con $P_i(g) > P_i(E_7)$. Dado que E_7 es el grafo completo, g se obtiene eliminando una de las aristas $\{ij, ik\}$ que controla i en E_7. Los pagos P_i que obtiene el jugador i al eliminar cualquiera de las dos aristas o ambas son $1/6$ o 0 respectivamente. Entonces $P_i(g) \leq P_i(E_7)$, en contradicción con lo supuesto.

Si g es un escenario cuyo grafo no es completo, existen dos jugadores i y j tales que la arista ij no pertenece a g. La estabilidad del valor de Myerson [44, pág. 226] en este juego coalicional implica que $P_i(g + ij) > P_i(g)$, luego $g + ij \in S_i^+(g) \neq \emptyset$. Entonces, el escenario g no es estable Nash para el jugador i, por lo que no es un equilibrio de Nash. $\square$

Corolario 5.4.5 *Un escenario es estable Nash para i en el juego del poder coalicional de 3 jugadores si y sólo si i está conectado a los otros dos jugadores (el grado de i en el grafo es $n - 1 = 2$).*

Teorema 5.4.6 *Los tres escenarios con un jugador aislado E_1, E_2 y E_6 son sucesionalmente estables para los dos jugadores relacionados.*

Demostración: Sea g un escenario con un jugador aislado k y sean $\{i, j\}$ los dos jugadores relacionados. Entonces los pagos que reciben los jugadores son

$$P_i(g) = P_j(g) = \frac{1}{2}, \quad P_k(g) = 0.$$

Para probar que g es sucesionalmente estable para los jugadores i y j, considérese $g_1 \in S_i^+(g)$. Entonces, necesariamente g_1 es el grafo con aristas $\{ij, ik\}$, donde $P_i(g_1) = 4/6$. Ante la mejora unilateral de i, los jugadores de $N \setminus \{i\} = \{j, k\}$ responden con un acuerdo mutuo porque ambos mejoran en el escenario $g_1 + jk = E_7$ del grafo completo, recibiendo cada uno $1/3$ en vez de $1/6$. Esta respuesta implica que

$$P_i(E_7) = \frac{1}{3} < \frac{1}{2} = P_i(g),$$

con lo que g es sucesionalmente estable para i. El mismo razonamiento es válido para el jugador j. $\square$

El Teorema 5.4.4 establece que el único equilibrio de Nash en el juego del poder coalicional de tres jugadores es el grafo completo E_7. Esta configuración aparece en el Parlamento Andaluz durante las negociaciones sobre los presupuestos de 1995 y 1996.

El Teorema 5.4.6 explica que los acuerdos entre los jugadores que excluyen a un tercero son sucesionalmente estables, es decir, son acuerdos que se mantienen excepto en el caso de que alguno de los coaligados entable relaciones con el jugador aislado. En ese caso, una respuesta de los otros dos hace que el escenario cambie al grafo completo. La amenaza de la respuesta conjunta a un primer movimiento unilateral es la base de la estabilidad en estos escenarios.

Por último, se presenta el análisis correspondiente a la legislatura iniciada en 1996. En este caso, los jugadores son los grupos parlamentarios

PSOE–A(1), PP–A(2), IU–CA(3), PA(4),

con la mayoría simple $q = 55$. Así, el juego de votación ponderada se representa por $[55;\ 52, 40, 13, 4]$.

La geometría $(N, Co(P))$ analizada, es la correspondiente al orden izquierda–derecha

IU_________PSOE_________ PA_________PP

Los resultados obtenidos son

ShapleyValue3[Andalucía] ={ 1/2, 1/6, 1/6, 1/6 },
ShapleyValue3[JuegoConvexoAnda] ={ 2/3, 0, 1/6, 1/6 }.

En el escenario de relaciones completas, el PSOE–A tiene la mitad del poder, mientras la otra mitad se reparte entre los tres partidos restantes a partes iguales. En el escenario del poder respecto a la geometría del orden izquierda–derecha, el PSOE–A tiene dos tercios del poder, el PP–A no tiene ningún poder, y el tercio restante se reparte por igual entre el PA e IU–CA. Estos resultados implican una fase de estabilidad en el Parlamento de Andalucía.

Referencias

[1] Aumann, R., Maschler, M. (1964) The bargaining set for cooperative games, en *Advances in Game Theory,* M. Dresher, L. Shapley, A. Tucker (eds.), Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 443–471.

[2] Aumann, R., Dréze, J.H. (1974) Cooperative Games with Coalition Structures, *International Journal of Game Theory* 3, 217–237.

[3] Aumann, R., Myerson, R. (1988) Endogenous Formation of Links between Players and Coalitions: an Application of the Shapley Value, en *The Shapley Value,* A. Roth (ed.), Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido, 175–191.

[4] Axelrod, R. (1970) *Conflict of Interest,* Markham, Chicago.

[5] Banzhaf, J.F., III (1965) Weighted Voting doesn´t work Mathematical Analysis, *Rutgers Law Review* 19, 317–343.

[6] Bergantiños, G., Carreras, F., García–Jurado, I. (1993) Cooperation when Some Players are Incompatible, *ZOR–Methods and Models of Operations Research* 38, 187–201.

[7] Bilbao, J.M., López, J.J. (1994) El Poder de las Naciones en la Unión Europea, *Política Exterior* 40, 79–90.

[8] Bilbao, J.M. (1995) Convex Geometries and Cooperation in Games, *preprint.*

[9] Bilbao, J.M., López, J.J. (1996) El Potencial de Hart y Mas–Colell para juegos restringidos por grafos, *Quaderns d´Estadística i Investigació Operativa,* 20(1), 7–22.

[10] Birkhoff, G., Bennett, M. K. (1985) The Convexity Lattice of a Poset, *Order* 2, 223–242.

[11] Bondareva, O. (1963) Certain Applications of the Methods of Linear Programming to the Theory of Cooperative Games, *Problemy Kibernetiki* 10, 119–139.

[12] Borm, P., Owen, G., and Tijs, S. (1992) The Position Value for Communication Situations, *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 5, 305–320.

[13] Borm, P., Nouweland, A., Owen, G., and Tijs, S. (1993) Cost Allocation and Communication, *Naval Research Logistics* 40, 733–744.

[14] Brams, J., Lucas, F., Straffin D. (1983) *Political and Related Models,* Springer–Verlag, New York.

[15] Calvo, E., Lasaga, J. (1995) Probabilistic Graphs and Power Indexes: An Application to the Spanish Parliament, *preprint*.

[16] Carreras, F., Owen, G. (1988) Evaluation of the Catalonian Parliament, 1980–1984, *Mathematical Social Sciences* 15, 87–92.

[17] Carreras, F. (1991) Restriction of Simple Games, *Mathematical Social Sciences* 21, 245–260.

[18] Carter, M. (1993) Cooperative Games, en *Economic and Financial Modeling with Mathematica,* H.R. Varian (ed.), TELOS, Springer–Verlag, 167–191, Berlin.

[19] Coleman, J. (1971) Control of collectivities and the Power of a collectivity to act, *Social Choice,* B. Lieberman (ed.), Gordon and Breach, Londres, 269–300.

[20] Driessen, T. (1988) *Cooperative Games, Solutions and Applications,* Kluwer, Dordrecht, Holanda.

[21] Dubey, P., Shapley, L. (1979) Mathematical Properties of the Banzhaf Power Index, *Mathematics Operations Research* 4, 99–131.

[22] Edelman, P.H., Jamison, R.E. (1985) The theory of convex geometries, *Geometriae Dedicata* 19, 247–270.

[23] Edelman, P.H. (1996) A Note on Voting, *preprint.*

[24] Einy, E. (1985) On Connected Coalitions in Dominated Simple Games, *International Journal of Game Theory* 14(2), 103–125.

[25] Faigle, U. (1989) Cores of Games with Restricted Cooperation, *ZOR–Methods and Models of Operations Research* 33, 405–402.

[26] Faigle, U., Kern, W. (1992) The Shapley Value for Cooperative Games under Precedence Constraints, *International Journal of Game Theory* 21, 249–266.

[27] Faigle, U., Kern, W. (1995) Partition Games and the Core of Hierarchically Convex Cost Games, *preprint.*

[28] Fang, L., Hipel, K.W., Kilgour, D.M. (1989) Conflict models in graph form: Solution concepts and their interrelationships, *European Journal Operational Research* 41, 86–100.

[29] Fang, L., Hipel, K.W., Kilgour, D.M. (1993) *Interactive Decision Making: The Graph Model for Conflict Resolution,* Wiley, New York.

[30] Gillies, D.B. (1953) Some Theorems on n–Person Games, *Ph. D. Tesis,* Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

[31] Grötschel, L., Lovász, Schrijver, A. (1988) *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization,* Springer–Verlag, New York.

[32] Harary, F. (1969) *Graph Theory,* Addison–Wesley, Massachusetts.

[33] Harsanyi, J.C. (1963) A Simplified Bargaining Model for the n–Person Cooperative Game, *International Economic Review* 4, 194–220.

[34] Harsanyi, J.C., Selten, R. (1988) *A General Theory of Equilibrium Selection in Games,* The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.

[35] Hart, S., Kurz, M. (1983) Endogeneus Formation of Coalitions, *Econometrica* 51, 1047–1064.

[36] Hart, S., Kurz, M. (1984) Stable Coalition Structures, en *Coalitions and Collective Action,* M. Holler (ed.), Physica–Verlag, Wuerzburg, Alemania, 235–258.

[37] Hart, S., Mas–Colell, A. (1988) The Potential of the Shapley Value, en *The Shapley Value,* A. Roth (ed.), Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido, 127–137.

[38] Herne, K., Nurmi, H. (1993) The Distribution of a Priori Voting Power in the EC Council of Ministers and the European Parliament, *Scandinavian Political Studies* 16 (3), 269–284.

[39] Kilgour, D.M., Fang, L., Hipel, K.W. (1990) General preference structures in the graph model for conflicts, *Information and Decision Technologies* 16, 291–300.

[40] Kurz, M. (1988) Coalitional Value, en *The Shapley Value,* A. Roth (ed.), Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido, 155–173.

[41] Lane, J.E., Mæland, R. (1995) Voting Power under the EU Constitution, *Journal of Theoretical Politics* 7(2), 223–230.

[42] Levy, A., McLean, R. (1989) Weighted Coalition Structure Values, *Games and Economic Behavior* 1, 234–249.

[43] McLean, R. (1991) Random Order Coalition Structure Values, *International Journal of Game Theory* 20, 109–127.

[44] Myerson, R.B. (1977) Graphs and Cooperation in Games, *Mathematics of Operations Research* 2, 225–229.

[45] Myerson, R.B. (1991) *Game Theory. Analysis of Conflict*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 444–451.

[46] Nash, J.F. (1950) Equilibrium points in n–Person Games, *Proceedings of National Academy of Sciences of the USA* 36, 48–49.

[47] Nash, J.F. (1951) Non–cooperative Games, *Annals of Mathematics* 54 (2), 268–295.

[48] Nouweland, A., Borm, P. (1991) On the Convexity of Communication Games, *International Journal of Game Theory* 19, 421–430.

[49] Nouweland, A., Borm, P., Tijs, S. (1992) Allocation Rules for Hypergraph Communication Situations, *International Journal of Game Theory* 20, 255–268.

[50] Nouweland, A. (1993) Games and Graphs in Economics Situations, *Ph. D. Tesis,* Universidad de Tilbourg, Holanda.

[51] Owen, G. (1977) Values of Games with a Priori Unions, en *Essays in Mathematical Economics and Game Theory,* R. Henn, O. Moeschlin (eds.), Springer–Verlag, Belin, Alemania, 76–88.

[52] Owen, G. (1986) Values of Graph–Restricted Games, *SIAM Journal of Algebraic and Discrete Methods* 7, 210–220.

[53] Owen, G. (1988) Multilinear extension of games, en *The Shapley Value,* A.E. Roth (ed.), Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido, 139–151.

[54] Owen, G., Winter, E. (1992) The Multilinear Extension and the Coalition Structure Value, *Games and Economic Behavior* 4, 582–587.

[55]Ríbnikov, K. (1985) *Análisis Combinatorio,* Mir, Moscú.

[56] Shapley, L. (1953) A Value for n–Person Games, *Contributions to the Theory of Games,* vol. II, H.W. Khun, A.W. Tucker (eds.), Princeton, New Jersey, 307–317.

[57] Shapley, L., Shubik, M. (1954) A Method for Evaluating the Distribution of Power in a Committee System, *American Political Science Review* 48, 787–792.

[58] Shapley, L. (1967) On Balanced Sets and Cores, *Naval Research Logistics Quarterly* 14, 453–460.

[59] Shapley, L. (1971) Cores of convex games, *International Journal of Game Theory* 1, 11–26.

[60] Shenoy, P. (1979) On Coalition Formation: A Game Theoretic Approach, *International Journal of Game Theory* 8, 133–164.

[61] Skiena, S. (1990) *Implementing Discrete Mathematics: Combinatorial and Graph Theory with Mathematica,* Addison–Wesley, Massachusetts.

[62] Stanley, R.P. (1986) *Enumerative Combinatorics,* Vol I, Wadsworth.

[63] Tijs, S., Otten, G. (1993) Compromise Values in Cooperative Game Theory, *TOP (Trabajos de Investigación Operativa)* 1(1), 1–51

[64] Von Neumann, J. (1928) Zur Theorie der Gesellschaftsspiele, *Mathematische Annalen* 100, 295–320.

[65] Von Neumann, J., Morgenstern, O. (1944) *Theory of Games and Economic Behavior,* Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

[66] WEBER, R.J. (1988) Probabilistic Values for Games, en *The Shapley Value,* A. Roth (ed.), Cambridge University Press, Cambridge, 101–119.

[67] WEBER, R.J. (1994) Games in coalitional form, en *Handbook of Game Theory,* Vol II, R.J. Aumann and Hart (eds.), Nort–Holland, Amsterdam, Holanda, 1285–1303.

[68] WIDGRÉN, M. (1994) Voting Power in the EC decision making and the consequences of two different enlargements, *European Economic Review* 38, 1153–1170.

[69] WILD, M. (1994) A Theory of Finite Closure Spaces Based on Implications, *Advances in Mathematics* 108, 118–139.

[70] WINTER, E. (1988) A Value for Cooperative Games with Levels Structure of Cooperation, *International Journal of Game Theory* 18, 227–240.

[71] WINTER, E. (1991) On Non–Tranferable Utiliy Games with Coalition Structure, *International Journal of Game Theory* 20, 53–63.

[72] WINTER, E. (1992) The Consistency and potencial for Games with Coalition Structure, *Games and Economic Behavior* 4, 132–144.

[73] WOLFRAM, S. (1991) *Mathematica: A System for Doing Mathematics by Computer,* Addison–Wesley, Massachusetts.