

Introducción a la teoría de juegos no cooperativos

JESÚS MARIO BILBAO

Matemática Aplicada II
Universidad de Sevilla

1 Conceptos básicos

La teoría de juegos es una teoría para tomar decisiones racionales, fundada por John von Neumann y Oskar Morgenstern en su *Theory of Games and Economic Behavior* (1944). Algunos textos introductorios son:

1. AXELROD, R. (1984) *La evolución de la cooperación*, Alianza Editorial, Madrid.
2. DAVIS, M.D. (1971) *Introducción a la teoría de juegos*, Alianza Editorial, Madrid.
3. DRIESSEN, T. (1988) *Cooperative Games, Solutions and Applications*, Kluwer, Dordrecht.
4. FRIEDMAN, J.W. (1991) *Teoría de juegos con aplicaciones a la economía*, Alianza Editorial, Madrid.
5. FANG, L., HIPEL, K.W., KILGOUR, D.M. (1993) *The Graph Model for Conflict Resolution*, Wiley, New York.
6. POUNDSTONE, W. (1992) *El dilema del prisionero*, Alianza Editorial, Madrid.

En el siguiente cuadro, se clasifican los métodos para tomar decisiones:

		OBJETIVOS	
		1	≥ 2
ACTORES	1	<i>Investigación operativa</i>	<i>Decisión multicriterio</i>
	≥ 2	<i>Juegos cooperativos</i>	<i>Juegos no cooperativos</i>

En el primer tema de este curso, introducimos los juegos no cooperativos, es decir en los que participan dos o más jugadores, que tienen dos o más objetivos. En general, se pueden considerar cuatro clases de juegos:

- Juegos en forma extensiva (árbol)
- Juegos en forma estratégica (normal)
- Juegos en forma gráfica
- Juegos en forma coalicional

Las tres primeras clases de juegos se analizan en la teoría de juegos no cooperativa y la cuarta corresponde a los juegos cooperativos.

1.1 Juegos en forma de árbol

En la figura 1, tenemos dos jugadores 1 y 2, que participan en el siguiente juego. En primer lugar, el jugador 1 decide ir a la izquierda (I) o a la derecha (D). Entonces, el jugador 2 decide ir a la derecha o a la izquierda. Los pagos que corresponden al primer (segundo) jugador son la primera (segunda) componente del vector que tiene asignada cada situación.

Analícemos como deben jugar 1 y 2. El jugador 2, teniendo en cuenta los pagos que recibirá al terminar el juego, debe elegir la siguiente estrategia: si el jugador 1 elige I , ir a la derecha eligiendo d_1 , y si 1 elige D , elegir i_2 . Esta estrategia se denotará $d_1 i_2$. El jugador 1 conoce el árbol y los pagos, luego puede anticipar la conducta del jugador 2 y debe elegir D .

El par de estrategias $(D, d_1 i_2)$ da lugar a un escenario en el que el jugador 1 recibe 4 y el jugador 2 recibe 8.

¿Puede alguno de los jugadores mejorar sus pagos?

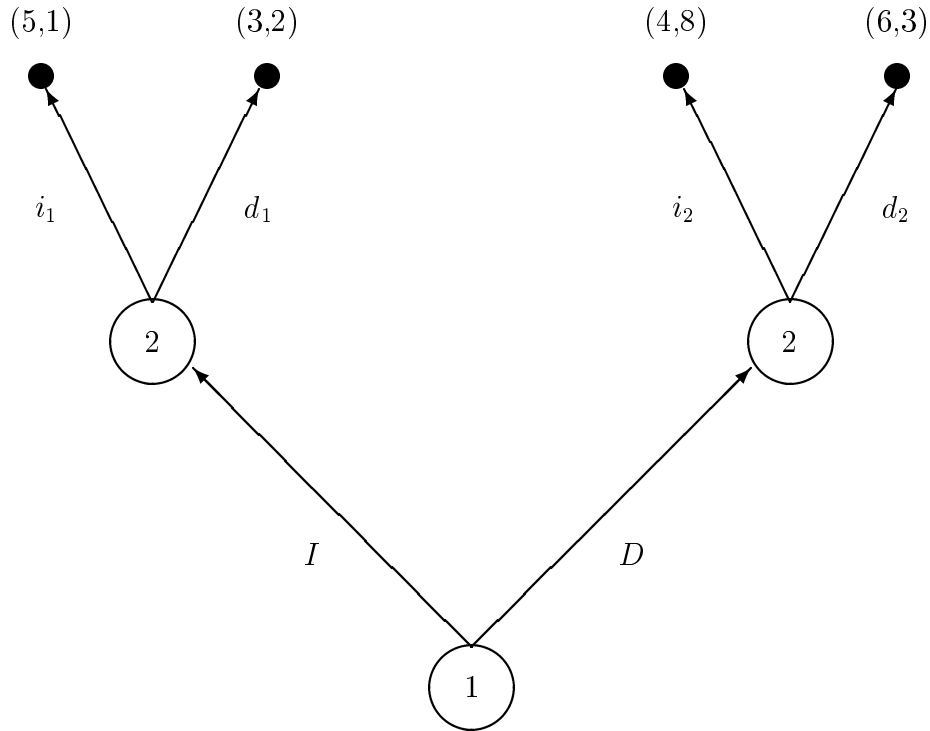


Figura 1: Un juego en forma extensiva

1.2 Juegos en forma estratégica

En el ejemplo que estamos analizando, el jugador 1 tiene dos estrategias I y D , mientras que el jugador 2 tiene cuatro estrategias dadas por

$$i_1i_2, i_1d_2, d_1i_2, d_1d_2.$$

Podemos representar los pagos en la siguiente matriz, cuyas entradas son los vectores de pagos,

$$\begin{array}{c}
 \\
 I \\
 D
 \end{array}
 \begin{array}{cccc}
 i_1i_2 & i_1d_2 & d_1i_2 & d_1d_2 \\
 \left[\begin{array}{cccc}
 (5, 1) & (5, 1) & (3, 2) & (3, 2) \\
 (4, 8) & (6, 3) & (4, 8)^* & (6, 3)
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Notemos que las matrices de pagos para los jugadores 1 y 2 son, respectivamente,

$$P_1 = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 8 & 3 & 8 & 3 \end{bmatrix}.$$

El par de estrategias (D, d_1i_2) es un equilibrio de Nash porque ninguna desviación unilateral de los jugadores les permite mejorar sus pagos, dados por $(4, 8)$.

Definición 1 Sea $N = \{1, 2, \dots, n\}$ un conjunto de jugadores. Un juego estratégico de n personas se representa por $\Gamma = ((X_i)_{i \in N}, (K_i)_{i \in N})$, donde X_i es el espacio de las estrategias del jugador i , y $K_i : \prod_{i \in N} X_i \rightarrow \mathbb{R}$ es la función de pagos del jugador i .

Cada combinación estratégica $x \in \prod_{i \in N} X_i$ se denomina un escenario o resultado del juego. Dados un escenario $x = (x_1, \dots, x_n)$ y una estrategia $y \in X_i$ del jugador i , denotamos mediante (x_{-i}, y) el escenario que obtenemos de x , reemplazando su i -ésima componente x_i por y . Usando esta notación, vamos a definir el concepto más importante de la teoría de juegos no cooperativos.

Definición 2 Un escenario $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ es un equilibrio de Nash del juego $\Gamma = ((X_i)_{i \in N}, (K_i)_{i \in N})$ si para todo jugador $i \in N$, y para toda estrategia $x_i \in X_i$, se verifica $K_i(x_{-i}^*, x_i) \leq K_i(x_i^*)$.

Un ejemplo político

En un año electoral, dos partidos políticos A, B deben pronunciarse sobre una disputa entre dos comunidades X, Y relativa a ciertos derechos de aguas, y cada partido debe decidir si favorece a una de las dos o soslaya la cuestión.

En la siguiente tabla se representan por filas las estrategias del programa de A , y por columnas las estrategias del programa de B . Los pagos al partido A , en porcentaje de votos, se dan en las entradas de la tabla, y la suma de porcentajes de A y B es 100.

	Favorecer X	Favorecer Y	Soslayar
Favorecer X	35	10	60
Favorecer Y	45*	55	50
Soslayar	40	10	65

El método para encontrar los equilibrios de Nash es el siguiente. Supongamos que B conoce la decisión de A . Entonces, B elige la columna donde se hace *mínimo* el pago de A , con lo que A elegirá la fila que la proporcione el *máximo* de dichos mínimos. Este valor, denominado *maximin* es la cantidad que con seguridad puede obtener A y en este juego es

$$\max_i \min_j a_{ij} = \max \{10, 45, 10\} = 45.$$

Si cambiamos los papeles de A y B , siendo A el que conoce la estrategia de B , tenemos que A elige la fila que maximiza su pago, con lo que B se decidirá por la columna que minimice dichos máximos. El valor minimax de este juego es

$$\min_j \max_i a_{ij} = \min \{45, 55, 65\} = 45.$$

En este juego, hemos obtenido un par de estrategias (Y, X) con pago $a_{21} = 45$, que constituye el único equilibrio de Nash de este juego.

1.3 Juegos en forma gráfica

Fang, Hipel y Kilgour proponen el siguiente *modelo gráfico* para un juego no cooperativo. Éste consiste en un conjunto $N = \{1, 2, \dots, n\}$ de jugadores, un conjunto $U = \{1, 2, \dots, u\}$ de escenarios, una familia de grafos dirigidos $D_i = (U, A_i)$ para cada jugador $i \in N$, y una familia de funciones de pago $K_i : U \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in N$.

El modelo se completa definiendo el conjunto de movimientos que un jugador puede realizar para cambiar (unilateralmente) de escenario y así obtener los grafos dirigidos D_i . Dado que en el juego el objetivo es aumentar los pagos que recibe el jugador, tenemos las siguientes definiciones:

Dado un escenario g y un jugador i , el conjunto de los escenarios que el jugador puede alcanzar unilateralmente desde g se denota por $S_i(g)$. Si además, i recibe un pago estrictamente mayor, los escenarios de mejora unilateral para i son:

$$S_i^+(g) = \{q \in S_i(g) : K_i(q) > K_i(g)\}.$$

Introducimos los siguientes conceptos de estabilidad y equilibrio.

Definición 3 Un escenario $g \in U$ es estable Nash para el jugador i si $S_i^+(g) = \emptyset$. Un escenario $g \in U$ es secuencialmente estable para el jugador i si para cualquier $g_1 \in S_i^+(g)$ existe al menos un escenario $g_x \in S_{N \setminus i}^+(g_1)$ con $K_i(g_x) \leq K_i(g)$.

Definición 4 Un equilibrio de Nash es un escenario que es estable Nash para todos los jugadores. Un equilibrio secuencial es un escenario que es secuencialmente estable para todos los jugadores.

2 Juegos bipersonales de suma cero

Un juego en forma estratégica $\Gamma = ((X_i)_{i \in N}, (K_i)_{i \in N})$ es un juego de suma cero si $\sum_{i \in N} K_i = 0$.

Un juego de dos personas se denota con (X, Y, K, L) , donde las estrategias son $X = \{1, 2, \dots, m\}$ y $Y = \{1, 2, \dots, n\}$. Entonces este juego bipersonal se puede representar mediante una matriz $m \times n$ cuyas entradas son vectores de \mathbb{R}^2 ,

$$\begin{bmatrix} (K(1, 1), L(1, 1)) & \cdots & (K(1, n), L(1, n)) \\ \vdots & & \vdots \\ (K(i, 1), L(i, 1)) & \cdots & (K(i, n), L(i, n)) \\ \vdots & & \vdots \\ (K(m, 1), L(m, 1)) & \cdots & (K(m, n), L(m, n)) \end{bmatrix}$$

Las filas (columnas) corresponden a las m (n) estrategias del jugador 1 (2). En el caso de que el juego bipersonal sea de suma nula, tenemos que $L = -K$, y se representa con la matriz $(K(i, j))_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$.

Veamos un ejemplo de juego bipersonal de suma nula para introducir los principales conceptos.

El jugador I elige una carta de un mazo de tres cartas numeradas 1,2,3. El jugador II intenta adivinar la carta que ha elegido I. Después de cada conjetura el jugador I informa al II diciéndole *alto*, *bajo* o *correcto*, dependiendo de la conjetura de I.

El juego termina cuando el jugador II acierta la carta y paga al jugador I una cantidad igual al número de tentativas que ha hecho. En el siguiente juego, I y II intercambian sus papeles.

Las estrategias del jugador I son $X = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, donde α es elegir la carta 1, β la carta 2 y γ la carta 3. Las estrategias del jugador II (excluyendo algunas tontas) son $Y = \{a, b, c, d, e\}$, dadas por:

a : Decir 1, si el oponente dice bajo, decir 2 en la siguiente ronda. Si de nuevo dice bajo, decir 3.

b : Decir 1, si el oponente dice bajo, decir 3 en la siguiente ronda. Si dice alto, decir 2.

c : Decir 2, si el oponente dice bajo, decir 3; si dice alto, decir 1.

d : Decir 3, si el oponente dice alto, decir 1 en la siguiente ronda. Si después dice bajo, decir 2.

e : Decir 3, si el oponente dice alto, decir 2 en la siguiente ronda. Si de nuevo dice alto, decir 1.

La matriz de pagos de este juego es

$$\begin{array}{c} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{array} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \\ \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

Definición 5 Un par de estrategias (i^*, j^*) para una matriz de pagos $K = (K(i, j))$ es un punto de silla si $K(i, j^*) \leq K(i^*, j^*) \leq K(i^*, j)$, $\forall i, \forall j$.

Si existe, un punto de silla $K(i^*, j^*)$ es el pago seguro que tiene el jugador I contra la elección racional del jugador II (que busca minimizar el pago a I). En general, una matriz no tiene puntos de silla y si existe alguno, no necesariamente es único. Si $K(i^*, j^*)$ es un punto de silla, entonces se verifica

$$K(i^*, j^*) = \max_i \min_j K(i, j) = \min_j \max_i K(i, j).$$

El juego de adivinar la carta numerada no tiene punto de silla porque

$$\begin{aligned} \max_i \min_j K(i, j) &= 1, \\ \min_j \max_i K(i, j) &= 2. \end{aligned}$$

Cuando un juego no tenga puntos de silla, es posible elegir estrategias mixtas, obteniendo un nuevo juego, denominado *extensión mixta*. Para un juego $m \times n$ matricial $A = (a_{ij})$, el conjunto de estrategias mixtas para el jugador I es

$$\Delta^m := \left\{ x \in \mathbb{R}_+^m : \sum_{i=1}^m x_i = 1 \right\}.$$

Cada estrategia mixta $x = (x_1, \dots, x_m) \in \Delta^m$ consiste en jugar la estrategia de la fila i con probabilidad x_i . De manera análoga, las estrategias mixtas para el jugador II son

$$\Delta^n := \left\{ y \in \mathbb{R}_+^n : \sum_{j=1}^n y_j = 1 \right\}.$$

Definición 6 Sea A un juego matricial $n \times m$. Entonces, la extensión mixta de A es el juego infinito $(\Delta^m, \Delta^n, K, L)$, definido mediante

$$\begin{aligned} K(x, y) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i a_{ij} y_j = x^T A y, \\ L(x, y) &= -K(x, y). \end{aligned}$$

Teorema 1 (von Neumann) Sea A un juego matricial $n \times m$. Entonces, existen un par de estrategias mixtas $(x^*, y^*) \in \Delta^m \times \Delta^n$ tales que

$$K(x^*, y^*) = \max_{x \in \Delta^m} \min_{y \in \Delta^n} K(x, y) = \min_{y \in \Delta^n} \max_{x \in \Delta^m} K(x, y).$$

La existencia de estrategias mixtas óptimas no nos da un método para calcularlas. El teorema minimax también puede probarse usando programación lineal, lo que permite obtener un algoritmo eficiente mediante el *método del simplex*.

3 Juegos bipersonales de suma no nula

El teorema de von Neumann se generaliza a los juegos bipersonales de suma no nula, que denominamos *juegos bimatriciales*, considerando la extensión mixta de un juego bimatricial (A, B) , que denotamos $(\Delta^m, \Delta^n, K, L)$, dada por $K(x, y) := x^T A y$, $L(x, y) := x^T B y$, donde $x \in \Delta^m$, $y \in \Delta^n$. El resultado fundamental que garantiza la existencia de equilibrios de Nash es:

Teorema 2 (Nash) *La extensión mixta de un juego bimatricial tiene al menos un equilibrio de Nash.*

En lo que sigue, denotaremos el conjunto no vacío de los equilibrios de Nash de la extensión mixta del juego bimatricial (A, B) mediante $NE(A, B)$.

Los *juegos potenciales* han sido introducidos por Monderer y Shapley en 1993. Sea $\Gamma = ((X_i)_{i \in N}, (K_i)_{i \in N})$ un juego de n personas y sea $P : \prod_{i \in N} X_i \rightarrow \mathbb{R}$, una función real definida en el conjunto de los escenarios del juego. Entonces, P es un *potencial* del juego Γ si para cada jugador $i \in N$, cada $x_{-i} \in \prod_{k \neq i} X_k$ y cualquier par $x_i, x'_i \in X_i$ se verifica

$$K_i(x_{-i}, x'_i) - K_i(x_{-i}, x_i) = P(x_{-i}, x'_i) - P(x_{-i}, x_i).$$

Definición 7 *Un juego para el que exista un potencial $P : \prod_{i \in N} X_i \rightarrow \mathbb{R}$, se denomina un juego potencial.*

El juego del ciclo

Consideremos dos jugadores que viajan por las aristas del ciclo de la figura 2. El jugador 1 viaja desde A hasta C , a través de B o de D . El jugador 2 viaja desde B hasta D , a través de A o de C .

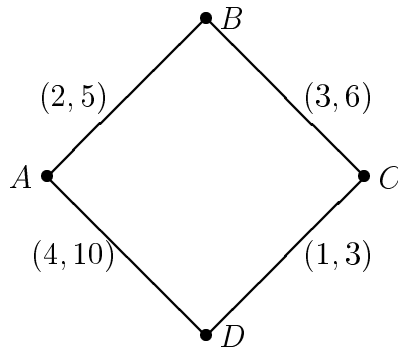


Figura 2: Un juego potencial

El coste de usar la arista AB es 2 si la usa un solo jugador y 5 si la usan los dos. El resto de los costos se representan con los vectores dados en la

figura 2. Esta situación es el juego de coste bimatricial dado por

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} BAD & BCD \end{array} \\ \begin{array}{c} ABC \\ ADC \end{array} & \left[\begin{array}{cc} (8, 9) & (8, 7) \\ (11, 12) & (7, 6)^* \end{array} \right] \end{array}$$

en el que hay un equilibrio de Nash con estrategias puras, cuyo coste mínimo es $(7, 6)$. Las matrices de costes para los jugadores 1 y 2 son, respectivamente,

$$C_1 = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 11 & 7 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}.$$

Comprobar, aplicando la definición que un potencial del juego viene dado por

$$P = \begin{bmatrix} 14 & 12 \\ 17 & 11 \end{bmatrix}.$$

Teorema 3 Sea $\Gamma = ((X_i)_{i \in N}, (K_i)_{i \in N})$ un juego de n personas con potencial P . Entonces,

1. $NE(X_1, \dots, X_n, K_1, \dots, K_n) = NE(X_1, \dots, X_n, P, \dots, P)$.
2. El juego Γ tiene al menos un equilibrio de Nash puro.

3.1 El dilema del prisionero

En este juego participan dos sospechosos de asesinato, que son interrogados por separado por el fiscal. Los prisioneros han llegado al acuerdo de no hablar.

Si ambos *cooperan* y no hablan, entonces reciben una condena menor por robo con armas con la recompensa (R, R) .

Si ambos incumplen su acuerdo y confiesan, entonces reciben un castigo mayor, luego sus pagos (P, P) verifican $R > P$.

Sin embargo, si uno de los jugadores no coopera confesando y el otro coopera callando, el que no coopera recibe un pago $T > R$ y el que coopera es condenado por asesinato, recibiendo el menor pago $S < P$. Observemos que T es un incentivo para traicionar la cooperación (pago a los arrepentidos).

El juego del dilema del prisionero en forma estratégica se modela con la siguiente bimatrix,

	c_2 coopera	d_2 defrauda
c_1 coopera	(R, R)	(S, T)
d_1 defrauda	(T, S)	$(P, P)^*$

donde los pagos verifican $T > R > P > S$.

Existen cuatro escenarios y el único equilibrio de Nash es el par de estrategias de no cooperación (d_1, d_2) , aunque los pagos a la cooperación (c_1, c_2) sean mayores. Este escenario (c_1, c_2) es inestable porque el pago por traicionar $T > R$, hace que el jugador 1 se mueva a la segunda fila o que el jugador 2 se mueva a la segunda columna. Además, (d_1, c_2) y (c_1, d_2) también son inestables porque $S < P$. Alcanzado el escenario de no cooperación, ambos jugadores pierden si cooperan.

Este resultado dificulta la cooperación en este tipo de juegos. La conclusión es más optimista si probamos que *el escenario de cooperación es secuencialmente estable*.

Si $g = (c_1, c_2)$, entonces el único escenario que puede alcanzar unilateralmente el jugador 1 es $g_1 = (d_1, c_2)$, pero el jugador 2 puede responder con el movimiento a la segunda columna, alcanzándose el escenario $g_x = (d_1, d_2)$. En el escenario g_x tenemos que el pago al primer jugador $P < R$, luego g es secuencialmente estable.

El juego del gallina consiste en conducir dos coches, uno frente a otro. Si ambos se desvían, los dos jugadores son gallinas pero se mantienen vivos, si ninguno se desvía, sufren un accidente y los pagos son los menores. Si uno de los dos no se desvía, el que lo hace es el gallina. Otra variante del juego, que protagonizó James Dean en *Rebelde sin causa*, es quedar a la menor distancia del borde de un acantilado. Este juego se modela con la bimatriz dada por

	d_2 desvía	nd_2 no desvía
d_1 desvía	(R, R)	(S, T)
nd_1 no desvía	(T, S)	(P, P)

donde $T > R > S > P$.

Observemos que en el dilema del prisionero tenemos $P > S$. Esta diferencia tiene importantes consecuencias para los equilibrios del juego. Así, el juego del gallina tiene dos equilibrios de Nash en los escenarios (d_1, nd_2) y (nd_1, d_2) . Sin embargo, el escenario de menor riesgo (d_1, d_2) no es estable Nash y tampoco es secuencialmente estable.

4 El dilema del prisionero repetido

Supongamos que el juego del dilema del prisionero se repite indefinidamente. Una *estrategia* en este *superjuego* es un programa que le dice al jugador en cada etapa cuando debe jugar cooperativamente C o defraudar D . El programa puede ser dependiente de las etapas previas, independiente y también, estocástico.

Si A_n^i es el pago de un jugador i en la etapa n , entonces el pago medio esperado en el superjuego es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_1^i + \dots + A_n^i}{n},$$

suponiendo que el límite existe. Veamos algunas estrategias autónomas y otras que usan la jugada anterior.

1. Cooperar siempre, que denotamos **C**.
2. Defraudar siempre, que denotamos **D**.
3. Toma y daca, que comienza cooperando y después repite siempre la jugada del adversario. Se denota TD .
4. La estrategia de Pavlov es cooperar si recibe la recompensa R por cooperación mutua. Análogamente, defrauda porque le ha salido bien, al recibir T . Si defrauda y recibe P , opta por cooperar y si es engañado con el peor pago S , cambia su conducta para defraudar. Esta estrategia de *palo y zanahoria* se denota por PZ .

Las estrategias mencionadas se presentan en la siguiente tabla:

Mi E_n	Su E_n	Mi pago	C	D	TD	PZ
C	C	R	C	D	C	C
C	D	S	C	D	D	D
D	C	T	C	D	C	D
D	D	P	C	D	D	C

5 La evolución de la cooperación (Nice Guys Sometimes Finish First)

¿Porqué los individuos, humanos y animales, se ayudan mutuamente? La pregunta, usando términos de la biología evolutiva, es: ¿la selección natural favorece la conducta altruista?

En una interacción aislada entre dos individuos, cada uno de ellos debe elegir entre dos estrategias de interacción: cooperar (C) o defraudar (D). El dilema del prisionero es un modelo de interacción en la que los cuatro escenarios posibles tienen pagos tales que $T > R > P > S$.

	C_2	D_2
C_1	(R, R)	(S, T)
D_1	(T, S)	$(P, P)^*$

Sabemos que la conducta racional de cada jugador en una única interacción es elegir D . Sin embargo, una conducta cooperativa puede darse cuando se producen muchos encuentros y los jugadores eligen sus estrategias usando los resultados obtenidos en los encuentros previos. En efecto, la cooperación es más fácil en grupos estables y cerrados, mientras que los defraudadores pueden medrar entre una multitud anónima.

Recientemente, Nowak y May (véase *Investigación y Ciencia* 227 (1995) 42–48) han probado que en los modelos en los que cada jugador interactúa sólo con sus vecinos en un retículo bidimensional la conducta cooperativa es evolutivamente estable. Estos *juegos territoriales* se modelan con autómatas celulares. A continuación, desarrollamos un programa del dilema del prisionero territorial, usando el sistema de computación *Mathematica*.

El dilema del prisionero territorial

Gaylord, Nishidate, *Mathematica in Education and Research* 4 (1995)

Los puntos del retículo cuadrado tienen valores C o D, que representan estrategias de cooperar o defraudar. Después de jugar con los 8 puntos que le rodean y con él mismo, el punto adopta la conducta con mayor pago en cada torneo. La distribución inicial es un defraudador en el centro, rodeado de cooperadores.

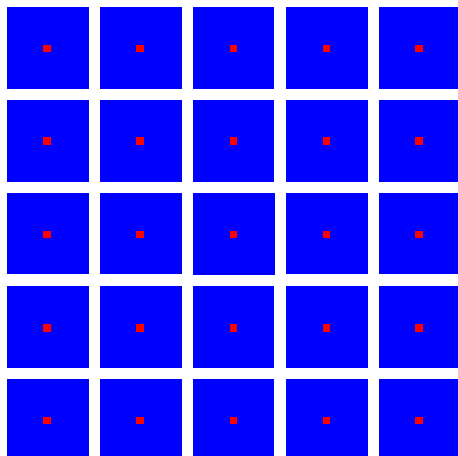
```

SpatialPrisonersDilemma[n_,p_,t_]:=Module[
{initConf,MooreValues,totalPayoffPlayer,outcome,
StrategyDecision,totalPayoffLat,sitePayoffPairsLat,
BestNbrhdPayoffStrategy,newStrategyLat,evolution},
initConf=
ReplacePart[Table[C,{2 n+1},{2 n+1}],D,{n+1,n+1}];
MooreValues[function_,lat_]:=
MapThread[function,{#,RotateRight[#{0,1}],
RotateRight[#{1,0}],RotateRight[#{0,-1}],
RotateRight[#{-1,0}],RotateRight[#{1,1}],
RotateRight[#{1,-1}],RotateRight[#{-1,-1}],
RotateRight[#{-1,1}]],2]&[lat];
totalPayoffPlayer[x_,a_,b_,c_,d_,e_,f_,g_,h_]:=
outcome[x,x]+outcome[x,a]+outcome[x,b]+outcome[x,c]+
outcome[x,d]+outcome[x,e]+outcome[x,f]+outcome[x,g]+
outcome[x,h];
outcome[C,C]=1;outcome[C,D]=0;
outcome[D,D]=0;outcome[D,C]=p;
StrategyDecision:=
(totalPayoffLat=MooreValues[totalPayoffPlayer,#];
sitePayoffPairsLat=MapThread[List,{totalPayoffLat,#},2];
BestNbrhdPayoffStrategy[x_]:=Last[Sort[{x}]][[2]];
newStrategyLat=
MooreValues[BestNbrhdPayoffStrategy,sitePayoffPairsLat])&
evolution=NestList[StrategyDecision,initConf,t]]

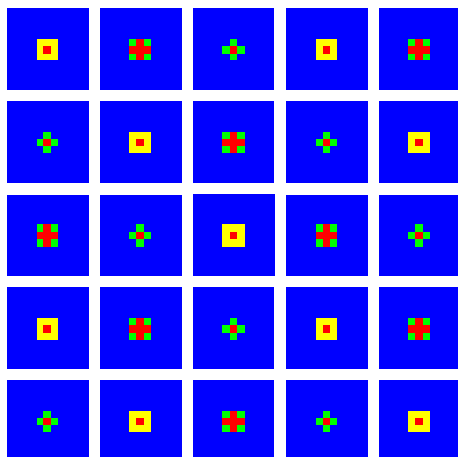
SocialEvolution[lis_]:=Module[{picture},
picture=Rest[MapThread[color,{#,RotateRight[#]}&[lis],3]];
Map[Show[Graphics[RasterArray[Reverse[#]/.
{color[C,C]->RGBColor[0,0,1],
color[D,D]->RGBColor[1,0,0],
color[C,D]->RGBColor[0,1,0],
color[D,C]->RGBColor[1,1,0]}]],
AspectRatio->Automatic,DisplayFunction->Identity]&,
picture]]

```

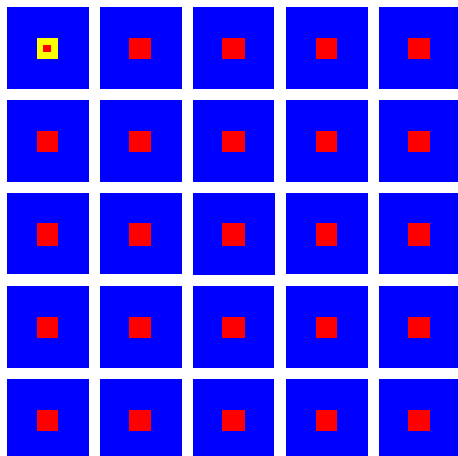
```
Show[GraphicsArray[Partition[SocialEvolution[  
SpatialPrisonersDilemma[5,1,25]],5]]];
```



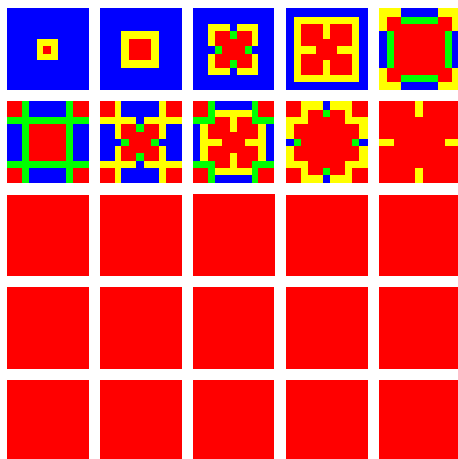
```
Show[GraphicsArray[Partition[SocialEvolution[  
SpatialPrisonersDilemma[5,1.5,25]],5]]];
```



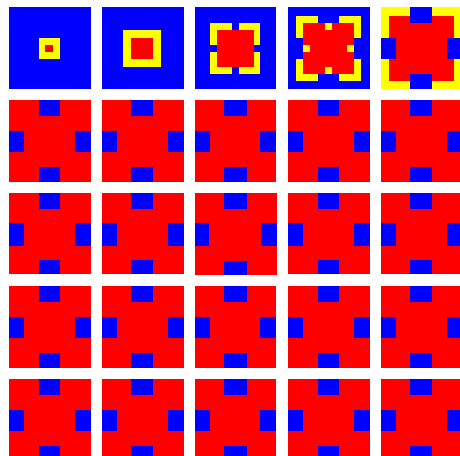
```
Show[GraphicsArray[Partition[SocialEvolution[
SpatialPrisonersDilemma[5,1.6,25]],5]]];
```



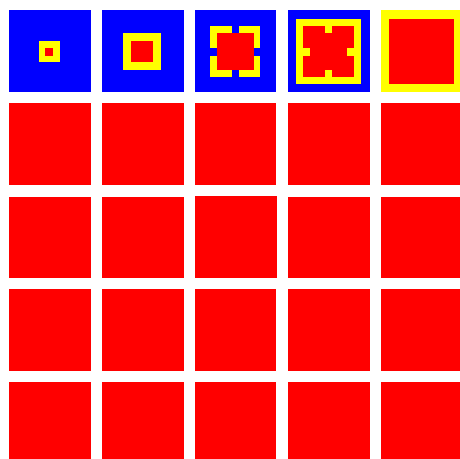
```
Show[GraphicsArray[Partition[SocialEvolution[
SpatialPrisonersDilemma[5,1.8,25]],5]]];
```



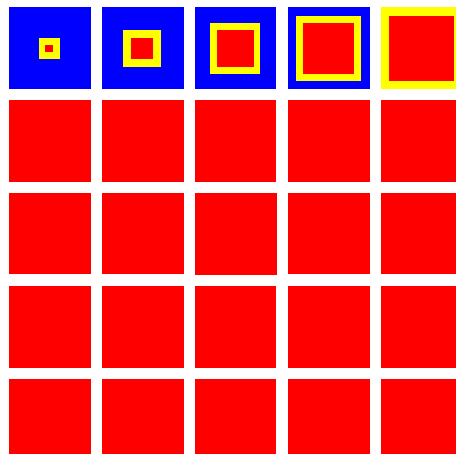

```
Show[GraphicsArray[Partition[SocialEvolution[  
SpatialPrisonersDilemma[5,2,25]],5]]];
```



```
Show[GraphicsArray[Partition[SocialEvolution[  
SpatialPrisonersDilemma[5,2.3,25]],5]]];
```



```
Show[GraphicsArray[Partition[SocialEvolution[
SpatialPrisonersDilemma[5,3,25]],5]]];
```



```
Show[GraphicsArray[Partition[SocialEvolution[
SpatialPrisonersDilemma[25,1.85,30]],5]]];
```

